

**10-ASIS FIZIKOS TURNYRAS**  
*12-oji užduotis Nr. FT10-12 / 2017 03 06 – 2017 04 02*

**Sąlyga / FT10-12 ▼**

**Pririšto rutuliuko pasitrunkimai į sieną**

Spindulio  $r = 1$  cm rutuliukas pakabintas ant  $l = 75$  cm ilgio siūlo ir gali laisvai sukstis apie pakabinimo tašką. Nejudantis rutuliukas liečia sieną, o siūlas vertikalus. Rutuliukas atitraukiamas nuo sienos taip, kad siūlas su vertikale sudarytų kampą  $\alpha = 8^\circ$ , o vertikali plokštuma, kurioje yra atlenktas siūlas, sudarytų kampą  $\beta = 55^\circ$  su sienos plokštuma. Rutuliukas paleidžiamas be pradinio greičio ir po tampraus smūgio atšoka nuo sienos. Trinties koeficientas tarp sienos ir rutuliuko  $\mu = 0,3$ , smūgio trukmė maža.

- 1) Kokio didumo ir krypties bus atšokančio rutuliuko masės centro greitis?
- 2) Kokio didumo kampiniu greičiu atšokantis rutuliukas suksis?
- 3) Koks laiko tarpas praeina tarp pirmojo ir antrojo rutuliuko smūgių į sieną?
- 4) Kokio didumo ir krypties bus antrą kartą atšokančio rutuliuko masės centro greitis?
- 5) Kokio didumo bus antrą kartą atšokančio rutuliuko kampinis greitis?

*Užduotį parengė mokyklos „Fizikos olimpas“ steigėjų tarybos narys, ilgametis mokyklos direktorius (11 m.) ir šio Fizikos turnyro užduočių parengimo spręsti ir jų sprendimų vertinimo komisijos pirmininkas prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.*

▲ Šis tekstas svetainėje [www.olimpas.lt](http://www.olimpas.lt) nuolat skelbiamas nuo 2017 03 06.

**Užduoties aiškinamasis sprendimas / FT10-12 ▼**

Pagal energijos tvermės dėsnį prieš pat smūgį rutuliuko greitis

$$v_0 = \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha)}.$$

Tas greitis sudaro kampą  $\beta$  su sienos plokštuma, statmena sienai ir jai lygiagreti greičio dedamosios atitinkamai yra

$$v_{\perp} = v_0 \sin \beta, \quad v_{=} = v_0 \cos \beta.$$

Įrašę skaitines vertes gauname:

$$v_0 = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 0,75 \cdot (1 - \cos 8^\circ)} = 0,38 \text{ (m/s)},$$

$$v_{\perp} = 0,38 \cdot \sin 55^\circ = 0,31 \text{ (m/s)}.$$

$$v_{=} = 0,38 \cdot \cos 55^\circ = 0,22 \text{ (m/s)}.$$

Smūgio metu rutuliuką veikia kintama statmena sienai tamprumo jėga  $F(t)$ , jos poveikyje rutuliuko greičio dedamoji  $v_{\perp}$  pakeičia kryptį:

$$2mv_{\perp} = \int_0^{\tau} F(t) dt,$$

čia  $m$  – rutuliuko masė,  $\tau$  – smūgio trukmė.

Smūgio metu rutuliuką veikia ir lygiagreti sienai trinties jėga  $F_{tr} = \mu F$ . Kadangi  $F_{tr}$  eina ne per rutuliuko centrą, ji stabdo rutuliuko slydimą ir suteikia jam kampinį greitį. Sakykim, kad rutuliuko masės centrą veikia jėga  $F'$ . Tada masės centro pagreitis

$$a = F'/m.$$

Rutuliuko kampinis pagreitis

$$\varepsilon = \frac{M}{I} = \frac{r(F_{tr} - F')}{\frac{2}{5}mr^2} = \frac{F_{tr} - F'}{\frac{2}{5}mr}$$

Skaičiuojant rutuliuko sukimaši lietimosi su siena taško atžvilgiu gauname:

$$\varepsilon = \frac{F'r}{\frac{2}{5}mr^2 + mr^2} = \frac{F'}{\frac{7}{5}mr}$$

Iš pateiktų lygčių gauname

$$F' = \frac{7}{9}F_{tr},$$

$$a = \frac{7}{9m}F_{tr} = \frac{7}{9m}\mu F,$$

$$v'_= = v_=$$

$$- \int_0^\tau a dt$$

$$= v_= - \frac{7\mu}{9m} \int_0^\tau F(t) dt = v_= - \frac{7\mu}{9m} \cdot 2mv_\perp = v_=(\cos \beta - \frac{14\mu}{9} \sin \beta),$$

$$v'_= = (\cos \beta - \frac{14\mu}{9} \sin \beta) \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha)},$$

$$v'_= = (\cos 55^\circ - \frac{14 \cdot 0,3}{9} \sin 55^\circ) \sqrt{2gl(1 - \cos 8^\circ)} = 0,073 \text{ (m/s)}.$$

Patikriname, ar rutuliukas nepradedą riedėti siena neslysdamas prieš atšokdamas. Rutuliukas įgauna kampinį greitį

$$\omega = \int_0^\tau \varepsilon dt = \int_0^\tau \frac{F'}{\frac{7}{5}mr} dt = \frac{5\mu}{9mr} \int_0^\tau F(t) dt = \frac{10\mu v_\perp}{9r},$$

$$\omega = \frac{10 \cdot 0,3 \cdot 0,31}{9 \cdot 0,01} = 10,3 \text{ (s}^{-1}\text{)}.$$

Tada lygiagrečioji sienai masės centro greičio dedamoji, sąlygota rutuliuko sukimosi jam atšokant būtų

$$v'_{=1} = \omega r = 10,3 \cdot 0,01 = 0,103 \text{ (m/s)}.$$

Matome, kad  $v'_{=1} > v'_=$ . Taigi, rutuliukas slys siena ne visą smūgio laiką  $\tau$ , o trumpesnę laiką  $\tau' < \tau$ , tol, kol pradės riedėti siena neslysdamas. Rutuliuko pagreičių išraiškos lieka tokios pačios, o greičiui gauname tokias lygtis:

$$v'_= = v_= - \int_0^{\tau'} a dt = v_= - \frac{7\mu}{9m} \int_0^{\tau'} F(t) dt,$$

$$\omega = \int_0^{\tau'} \varepsilon dt = \int_0^{\tau'} \frac{F'}{\frac{7}{5}mr} dt = \frac{5\mu}{9mr} \int_0^{\tau'} F(t) dt,$$

$$v'_= = \omega r.$$

Tada

$$v'_= = v_= - \frac{7}{5}\omega r = v_= - \frac{7}{5}v'_=,$$

$$v'_= = \frac{5}{12}v_=: v'_= = \frac{5}{12} \cdot 0,22 = 0,092 \text{ (m/s)},$$

$$v' = \sqrt{v_{\parallel}'^2 + v_{\perp}'^2}, \quad v' = \sqrt{0,092^2 + 0,31^2} = 0,32 \text{ (m/s)}.$$

Matuojant rutuliuko greičio su siena sudaromą kampą  $\gamma$  ta pačia kryptimi, kaip ir kampą  $\beta$ , kampas  $\gamma$  bus bukas ir lygus

$$\gamma = 180^\circ - \operatorname{arctg} \frac{v_{\perp}'}{v_{\parallel}'},$$

$$\gamma = 180^\circ - \operatorname{arctg} \frac{0,31}{0,092} = 107^\circ.$$

Rutuliuko kampinis greitis atšokant

$$\omega = \frac{v_{\parallel}'}{r},$$

$$\omega = \frac{0,092}{0,01} = 9,2 \text{ (s}^{-1}\text{)}.$$

Laiko tarpui tarp smūgių  $t'$  nustatyti taikome matematinės švytuoklės formulę:

$$t' = \frac{T}{2} = \pi \sqrt{(l+r)/g}, \quad t' = 3,14 \sqrt{(0,75 + 0,01)/9,8} = 0,87 \text{ (s)}.$$

Antrojo smūgio metu statmena sienai rutuliuko greičio dedamoji vėl pakeis kryptį veikiant tokiai pačiai jėgai  $F(t)$  kaip ir pirmojo smūgio metu, todėl veiks tokia pati trinties jėga  $F_{tr}(t)$ . Prieš pat smūgį rutuliuko masės centro greičio lygiagreti sienai dedamoji bus  $-v'_{\parallel}$ , o dėl rutuliuko sukimosi jėga  $F_{tr}$  veiks priešinga greičiui  $v'_{\parallel}$  kryptimi. Kaip ir užduotyje 1 galima įsitikinti, kad rutuliukas slys siena ne visą smūgio laiką  $\tau$ , o trumpesnę laiką  $\tau'' < \tau$ , tol, kol pradės riedėti siena neslysdamas. Rutuliuko greičiui gauname tokias lygtis:

$$v''_{\parallel} = v'_{\parallel} - \int_0^{\tau''} a dt = v'_{\parallel} - \frac{7\mu}{9m} \int_0^{\tau''} F(t) dt,$$

$$\omega' = \omega - \int_0^{\tau''} \varepsilon dt = \omega - \frac{5\mu}{9mr} \int_0^{\tau''} F(t) dt,$$

$$v''_{\parallel} = \omega' r.$$

$$v''_{\parallel} = v'_{\parallel} - \frac{7}{5} (\omega' - \omega) r = v'_{\parallel} - \frac{7}{5} v''_{\parallel},$$

$$v''_{\parallel} = \frac{5}{12} \left( v'_{\parallel} + \frac{7}{5} \omega r \right), \quad v''_{\parallel} = \frac{5}{12} \cdot (-0,092 + \frac{7}{5} \cdot 9,2 \cdot 0,01) = 0,015 \text{ (m/s)},$$

$$v' = \sqrt{v_{\parallel}''^2 + v_{\perp}'^2}, \quad v' = \sqrt{0,015^2 + 0,31^2} = 0,31 \text{ (m/s)}.$$

Kampas tarp rutuliuko greičio ir sienos  $\gamma'$  (matuojant ta pačia kryptimi, kaip ir kampą  $\beta$ ) gaunamas iš išraiškos

$$\gamma' = 180^\circ - \operatorname{arctg} \frac{v_{\perp}'}{v''_{\parallel}}, \quad \gamma' = 180^\circ - \operatorname{arctg} \frac{0,31}{0,015} = 93^\circ.$$

Rutuliuko kampinis greitis po antrojo smūgio bus

$$\omega' = \frac{v''_{\parallel}}{r}, \quad \omega' = \frac{0,015}{0,01} = 1,5 \text{ (s}^{-1}\text{)}.$$

*Užduoties aiškinamąjį sprendimą pateikė jos autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.*

▲ Šis tekstas svetainėje [www.olimpas.lt](http://www.olimpas.lt) nuolat skelbiamas nuo 2020 08 20.

### **Turnyro dalyvių sprendimų aptarimas / FT10-12 ▼**

Sprendžiant uždavinį būtina atsižvelgti į tai, kad smūgio į sieną metu rutuliukas ir slysta, ir rieda. Trinties jėga keičia ir judesio kiekį, ir judesio kiekio momentą. Energijos tvermės dėsnis smūgiui negalioja. Užduoties ypatingumas yra ir tai, kad trinties jėga veikia ne visą smūgio laiką, pabaigoje rutuliukas rieda siena neslysdamas.

*Užduoties sprendimų aptarimą parengė jos autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.*

▲ Šis tekstas svetainėje [www.olimpas.lt](http://www.olimpas.lt) nuolat skelbiamas nuo 2020 08 20.

### **Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelė / FT10-12 ▼**

<b>Nr.</b>	<b>Sprendimų vertinimo kriterijus</b>	<b>Vertė balais</b>
1.	Greitis prieš pat smūgį	1
	Greitis po smūgio	2
	Greičio po smūgio su siena sudaromas kampas	1
2.	Kampinis greitis po smūgio	1
3.	Laiko tarpas tarp smūgių	1
4.	Geičio po antrojo smūgio su siena sudaromas kampas	1
	Greitis po antrojo smūgio	2
5.	Kampinis greitis po antrojo smūgio	1
4.	Pateikta ne pagal reikalavimus	-1
5.	Netikslumai (kiekvienam iš kriterijų Nr.1-5)	iki (-1)
	Didžiausias galimas sprendimų įvertinimas	10

*Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelę parengė užduoties autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.*

▲ Šis tekstas svetainėje [www.olimpas.lt](http://www.olimpas.lt) nuolat skelbiamas nuo 2020 08 20.