

12-ASIS FIZIKOS TURNYRAS
10-oji užduotis Nr. FT12-10 / 2019 01 28 – 2019 02 24

Sąlyga / FT12-10 ▼

Rutuliukai kosmose


Iš kosminio laivo išmesti du homogeniniai rutuliukai, jų spinduliai $r_1 = 2$ cm ir $r_2 = 1$ cm, masės atitinkamai $m_1 = 80$ g ir $m_2 = 10$ g, kosminis laivas nutolsta. Pradžioje rutuliukų greičiai lygūs, tarp jų veikia tik gravitacija, atstumas tarp jų centrų $l = 10$ cm.

- 1) Koks bus rutuliukų tarpusavio greitis prieš pat jiems susiduriant?
- 2) Parašykite rutuliukų judėjimo lygtį jų bendro masės centro koordinatinių sistemoje iki susidūrimo (kintamuoju imkite atstumą tarp rutuliukų centrų).
- 3) Įvertinkite laiką po kurio susidurs išmesti rutuliukai.
- 4) Kokiam mažiausiam rutuliukų tarpusavio greičiui esant rutuliukai nesusidurs?

Užduotį parengė mokyklos „Fizikos olimpas“ steigėjų tarybos narys, ilgametis mokyklos direktorius (11 m.) ir šio Fizikos turnyro užduočių parengimo spęsti ir jų sprendimų vertinimo komisijos pirmininkas prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2019 01 28.

Užduoties aiškinamasis sprendimas / FT12-10 ▼

Sprendžiame uždavinį rutuliukų bendrojo masių centro koordinatinių sistemoje. Ašį x parenkame einančią per rutuliukų centrus, koordinatinių  pradžia – rutuliukų bendras masių centras O . Jo vietą apibrėžia sąlyga

$$O_1O \cdot m_1 = O_2O \cdot m_2.$$

Kadangi $O_1O + O_2O = l$, gauname

$$O_1O = \frac{lm_2}{m_1 + m_2}.$$

Laikome, kad rutuliukų gravitacinės sąveikos potencinė energija $W(x)$ lygi nuliui esant be galo dideliame atstume tarp rutuliukų. Tada

$$W(x) = -\frac{\gamma m_1 m_2}{x_2 - x_1}.$$

Čia gravitacinė konstanta $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$. Prieš pat susidūrimą rutuliukų greičiai v_1 ir v_2 , o atstumas tarp jų centrų $l' = r_1 + r_2$. Panaudojame judesio kiekio ir energijos tvermės dėsnius.

$$m_1 \vec{v}_1 = -m_2 \vec{v}_2,$$

$$m_1 v_1 = m_2 v_2,$$

$$-\frac{\gamma m_1 m_2}{l} = -\frac{\gamma m_1 m_2}{l'} + \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}.$$

$$v_2 = \frac{m_1 v_1}{m_2},$$

$$v_1^2 \frac{m_1 + m_2}{2m_2} = \gamma m_2 \left(\frac{1}{l'} - \frac{1}{l} \right),$$

$$v_1 = m_2 \sqrt{\frac{2\gamma}{m_1 + m_2} \left(\frac{1}{l'} - \frac{1}{l} \right)},$$

$$v_2 = m_1 \sqrt{\frac{2\gamma}{m_1 + m_2} \left(\frac{1}{l'} - \frac{1}{l} \right)}.$$

Rutuliukų tarpusavio greitis

$$v = v_1 + v_2 = \sqrt{2\gamma(m_1 + m_2) \left(\frac{1}{l'} - \frac{1}{l} \right)},$$

$$v = \sqrt{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot (0,08 + 0,01) \left(\frac{1}{0,03} - \frac{1}{0,1} \right)} = 1,67 \cdot 10^{-5} \text{ (m/s)}.$$

Rutuliukai sąveikauja jėga

$$F = \frac{\gamma m_1 m_2}{x^2}.$$

Pirmam rutuliukui ta jėga suteikia pagreitį

$$a_1 = \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{F}{m_1} = \frac{\gamma m_2}{x^2}.$$

Kadangi koordinatų pradžia parinkta masės centre

$$x_1 = -\frac{x m_2}{m_1 + m_2},$$

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\frac{d^2 x}{dt^2} \frac{m_2}{m_1 + m_2},$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{\gamma(m_1 + m_2)}{x^2}.$$

Tai ir yra ieškomoji judėjimo lygtis.

Ieškomąjį laiką τ nustatome iš išraiškos

$$\tau = \int_{r_1+r_2}^l \frac{dx}{v(x)}.$$

Rutuliukų tarpusavio judėjimo greitį gauname kaip pirmoje užduotyje

$$v(x) = v_1(x) + v_2(x) = \sqrt{2\gamma(m_1 + m_2)} \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{l}},$$

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{2\gamma(m_1 + m_2)}} \int_{r_1+r_2}^l \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{l}}} = \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{2\gamma(m_1 + m_2)}} \int_{r_1+r_2}^l \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{l-x}}.$$

Integralą imame iš žinyno

$$\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{l-x}} = -\sqrt{x(l-x)} - l \arcsin \sqrt{1 - \frac{x}{l}} + C.$$

Įrašę ribas gauname.

$$\tau = \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{2\gamma(m_1 + m_2)}} \left(\sqrt{(r_1 + r_2)(l - r_1 - r_2)} + l \arcsin \sqrt{1 - \frac{r_1 + r_2}{l}} \right),$$

$$\tau = \frac{\sqrt{0,1}}{\sqrt{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} (0,01 + 0,08)}} (\sqrt{(0,1 - 0,01 - 0,02)(0,01 + 0,02)} + 0,1 \arcsin \sqrt{1 - \frac{0,01 + 0,02}{0,1}}) = 13000 \text{ (s)} = 3,7 \text{ (h)}.$$

Kai rutuliukų tarpusavio greitis v'' nukreiptas ne išilgai tiesės, einančios per rutuliukų centrus, bet nėra didesnis už antrąjį kosminį greitį, rutuliukai juda elipsėmis, kurių vienas iš židinių yra rutuliukų bendras masių centras, jų centrai visą laiką išlieka tiesėje, einančioje per jų bendrą masių centrą. Rutuliukai nesudurs, jei mažiausias atstumas tarp jų centrų $l'' \geq r_1 + r_2$. Esant didžiausiam atstumui l ieškomas mažiausias greitis $v'' = v''_1 + v''_2$ yra statmenas O_1O_2 , o esant atstumui l'' greitis v''' taip pat statmenas O_1O_2 . Panaudojame energijos E tvermės dėsnį ir judesio kiekio momento L tvermės dėsnį:



$$E = \frac{m_1 v''_1^2}{2} + \frac{m_2 v''_2^2}{2} - \frac{\gamma m_1 m_2}{l} = \frac{m_1 v'''^2_1}{2} + \frac{m_2 v'''^2_2}{2} - \frac{\gamma m_1 m_2}{r_1 + r_2}.$$

$$L = m_1 v''_1 l_1 + m_2 v''_2 l_2,$$

$$v''_1 = \frac{v'' m_2}{m_1 + m_2},$$

$$v''_2 = \frac{v'' m_1}{m_1 + m_2},$$

$$L = m_1 \frac{v'' m_2}{m_1 + m_2} l_1 + m_2 \frac{v'' m_1}{m_1 + m_2} l_2 = \frac{v'' m_1 m_2}{m_1 + m_2} (l_1 + l_2) = \frac{v'' m_1 m_2 l}{m_1 + m_2},$$

$$\frac{v'' m_1 m_2 l}{m_1 + m_2} = \frac{v''' m_1 m_2 (r_1 + r_2)}{m_1 + m_2},$$

$$v''' = \frac{v'' l}{r_1 + r_2}$$

$$E = \frac{m_1}{2} \left(\frac{v'' m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 + \frac{m_2}{2} \left(\frac{v'' m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 - \frac{\gamma m_1 m_2}{l} = \frac{v''^2 m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} - \frac{\gamma m_1 m_2}{l},$$

$$\frac{v''^2 m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} - \frac{\gamma m_1 m_2}{l} = \frac{v'''^2 m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} - \frac{\gamma m_1 m_2}{r_1 + r_2},$$

$$\frac{v''^2 m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} - \frac{\gamma m_1 m_2}{l} = \frac{v''^2 l^2 m_1 m_2}{2(r_1 + r_2)^2 (m_1 + m_2)} - \frac{\gamma m_1 m_2}{r_1 + r_2},$$

$$v'' = \sqrt{\frac{2\gamma(m_1 + m_2)(r_1 + r_2)}{l(l + r_1 + r_2)}},$$

$$v'' = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot (0,08 + 0,01)(0,01 + 0,02)}{0,1 \cdot (0,1 + 0,01 + 0,02)}} = 5,26 \cdot 10^{-6} \text{ (m/s)}.$$

Užduoties aiškinamąjį sprendimą pateikė jos autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2020 07 27.

Turnyro dalyvių sprendimų aptarimas / FT12-10 ▼

Pirmąją užduotį dauguma išsprendė.

Atrodo, kad antroje užduotyje daugeliui pavadinimas „judėjimo lygtis“ nepatinka.

Didesnė pusė sprendusiųjų trečiąją užduotį išsprendė.

Keplerio dėsnį ir orbitos sąvokos nepaminėjo niekas. Kai kas pasinaudojo antruoju kosminiu greičiu, nors jo ir nepaminėjo, ir kuris nėra mažiausias.

Užduoties sprendimų aptarimą parengė jos autorius prof. habil. dr. Antanas Rinvidas Bandzaitis .

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2020 07 27.

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelė / FT12-10 ▼

Nr.	Sprendimų vertinimo kriterijus	Vertė balais
1.	Nustatytas rutuliukų tarpusavio greitis prieš pat jiems susiduriant	2
2.	Parašyta rutuliukų judėjimo lygtis	2
3.	Nustatytas laikas, po kurio susidurs išmesti rutuliukai	2
4.	Nustatytas rutuliukų judėjimo dėsningumas	2
	Nustatytas mažiausias rutuliukų tarpusavio greitis, kuriam esant rutuliukai nesusidurs	2
5.	Netikslumai (p. 1-4)	Iki (-1)
Didžiausias galimas sprendimų įvertinimas		10

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelę parengė užduoties autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2020 07 27.