

**6-ASIS FIZIKOS TURNYRAS**  
**6-oji užduotis Nr. FT6-6 / 2012 10 19 – 2012 11 12**

**Sąlyga / FT6-6 ▼**

**Sferinio kondensatoriaus tyrimas**

Sferinį kondensatorių ore sudaro dvi vienodo dydžio, bet priešingų ženklų krūviais įelektrintos bendracentrės sferos, kurių skersmenys lygūs 10 ir 20 cm. Yra žinoma, kad elektrostatinio lauko potencialas taške A, esančiame 7,5 cm atstumu nuo sferų centro, lygus -20 V. Reikia rasti:

- 1) sferų elektros krūvių paviršinius tankius;
- 2) elektrostatinio lauko stiprį tame taške;
- 3) kondensatoriuje sukauptą energiją;
- 4) elektrinę įtampą tarp taško A ir bet kurio kito taško, nutolusio nuo sferų centro 15 cm atstumu.

To dar nepakanka – reikia nubrėžti ir paaiškinti elektrostatinio lauko stiprio ir potencialo priklausomybes nuo atstumo iki sferų centro, kai tas atstumas kinta ribose nuo 3 iki 13 cm.

*Užduotį parengė Vilniaus universiteto Taikomųjų mokslų instituto direktoriaus pavaduotojas, Vilniaus universiteto Fizikos fakulteto Puslaidininkių fizikos katedros docentas, mokyklos „Fizikos olimpas“ direktorius, jos steigėjų tarybos narys ir dėstytojas dr. Stasys Tamošiūnas.*

▲ Šis tekstas svetainėje [www.olimpas.lt](http://www.olimpas.lt) nuolat skelbiamas nuo 2012 10 19.

**Užduoties aiškinamasis sprendimas / FT6-6 ▼**

Duota:  $q_1 = -q_2$ ,  $d_1 = 10 \text{ cm} = 0,1 \text{ m}$ ,  $d_2 = 20 \text{ cm} = 0,2 \text{ m}$ ,  $x_A = 7,5 \text{ cm} = 0,075 \text{ m}$ ,  $\varphi_A = -20 \text{ V}$ ,  $x_B = 15 \text{ cm}$ ,  $x_1 = 3 \text{ cm} = 0,03 \text{ m}$ ,  $x_2 = 13 \text{ cm}$ ,  $k = 9 \cdot 10^9 \text{ m/F}$ .

Rasti:  $\sigma_1, \sigma_2, E_A, W, U_{AB}, E(x), \varphi(x)$ .

Taškas A yra mažesnės sferos išorėje, todėl jos elektros krūvio  $q_1$  potencialas čia yra tiesiai proporcingas krūviui ir atvirkščiai proporcingas atstumui iki centro:

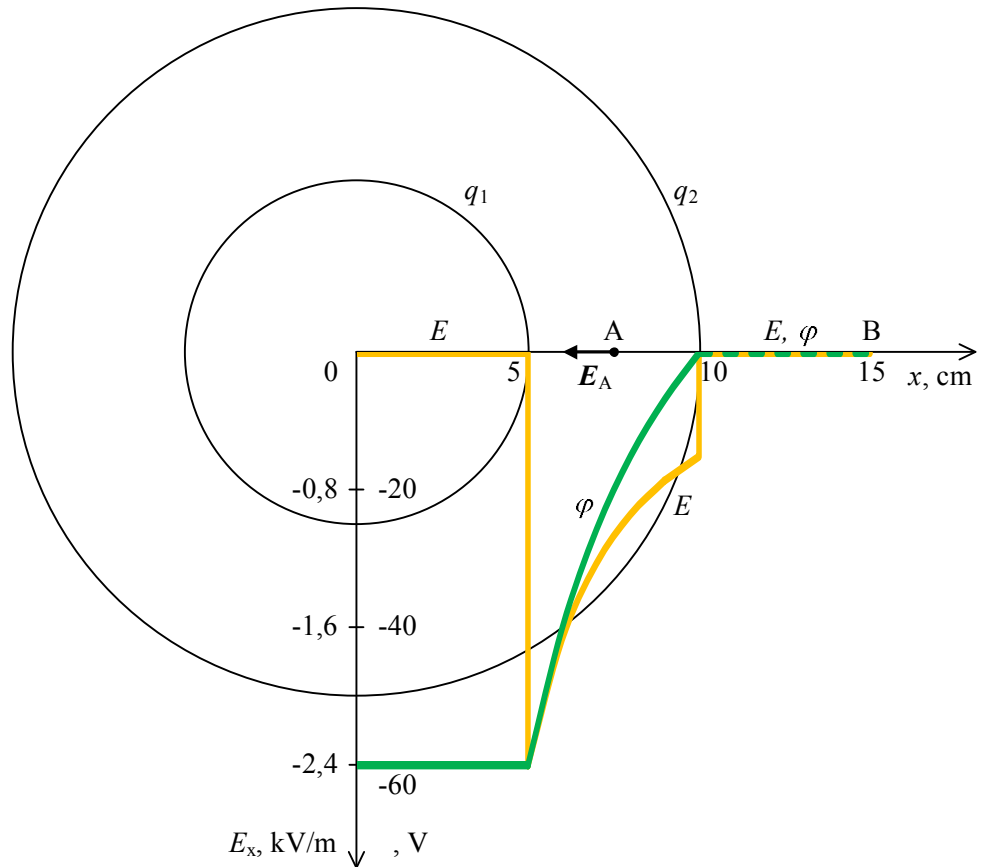
$$\varphi_1 = k \frac{q_1}{r_A}.$$

Taškas A yra didesnės sferos viduje, čia jos krūvio  $q_2$  sukurto elektrinio lauko stipris lygus nuliui, o potencialas lygus tos sferos paviršiaus potencialui:

$$\varphi_2 = 2k \frac{q_2}{d_2}.$$

Pagal superpozicijos principą  $\varphi_A = \varphi_1 + \varphi_2$ , o toliau rašomų formulių supaprastinimui yra patogiau apskaičiuoti mažesnės sferos krūvį:

$$q_1 = \frac{\varphi_A}{k \left( \frac{1}{r_A} - \frac{2}{d_2} \right)}, \quad q_1 = \frac{-20}{9 \cdot 10^9 \left( \frac{1}{0,075} - \frac{2}{0,2} \right)} \approx -\frac{2}{3} \text{ (nC)}.$$



Elektros krūvių tankiai

$$\sigma_1 = \frac{q_1}{\pi d_1^2}, \quad \sigma_1 = -\frac{2}{3 \cdot 3,14 \cdot 0,1^2} \approx -21,2 \text{ (nC/m}^2\text{)},$$

$$\sigma_2 = \frac{q_2}{\pi d_2^2} = -\frac{q_1}{\pi d_2^2}, \quad \sigma_2 = \frac{2}{3 \cdot 3,14 \cdot 0,2^2} \approx 5,3 \text{ (nC/m}^2\text{)}.$$

Elektrostatinio lauko stipris taške A yra tiesiai proporcingas mažesnės sferos krūviui ir atvirkščiai proporcingas atstumo nuo jos centro kvadratui, o jo vektoriaus projekcija į pasirinktą ašį X:

$$E_X = k \frac{q_1}{r_A^2}, \quad E_X = 9 \cdot 10^9 \frac{-2 \cdot 10^{-9}}{3 \cdot 0,075^2} \approx -1,07 \text{ (kV/m)}.$$

Didesnės sferos potencialas tarpe tarp sferų nekinta, todėl elektrinę įtampą kondensatoriuje lemia tik mažesnė sfera:

$$U = \varphi_1' - \varphi_1'',$$

čia mažesnės sferos paviršiaus potencialas

$$\varphi_1' = 2k \frac{q_1}{d_1},$$

o jos krūvio sukurtas potencialas ties didesnės sferos paviršiumi:

$$\varphi_1'' = 2k \frac{q_1}{d_2}.$$

Kondensatoriuje sukaupta energija

$$W = \frac{q_1 U}{2} = kq_1^2 \left( \frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right), \quad W = 9 \cdot 10^9 \cdot \left( -\frac{2}{3} 10^{-9} \right)^2 \left( \frac{1}{0,1} - \frac{1}{0,2} \right) = 20 \text{ (nJ)}.$$

Elektrinė įtampa tarp taškų A ir B:

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = \varphi_A = -20 \text{ V},$$

nes pagal sąlygą  $q_1 + q_2 = 0$ , todėl už sferų esančio taško B potencialas irgi lygus nuliui:

$$\varphi_B = k \frac{q_1 + q_2}{x_B} = 0.$$

Abiejų sferų viduje ( $x_1 \leq x < d_1/2$ ) elektrostatinio lauko stipris lygus nuliui, o potencialas nepriklauso nuo atstumo iki sferų centro ir yra lygus sferų paviršių potencialų sumai:

$$\varphi' = \varphi'_1 + \varphi_2 = 2kq_1 \left( \frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right), \quad \varphi' = 2 \cdot 9 \cdot 10^9 \left( -\frac{2}{3} 10^{-9} \right) \left( \frac{1}{0,1} - \frac{1}{0,2} \right) = -60 \text{ (V)}.$$

Tarp sferų ( $d_1/2 < x < d_2/2$ ) elektrostatinį lauką kuria tik mažesnės sferos krūvis, tai jo stiprio vektoriaus projekcija į pasirinktą ašį:

$$E(x) = k \frac{q_1}{x^2}, \quad E(x) = 9 \cdot 10^9 \frac{-2 \cdot 10^{-9}}{3x^2} = -\frac{6}{x^2}.$$

Čia mažesnės sferos potencialas yra atvirkščiai proporcingas  $x$ , todėl

$$\varphi(x) = k \frac{q_1}{x} + \varphi_2 = kq_1 \left( \frac{1}{x} - \frac{2}{d_2} \right), \quad \varphi(x) = 9 \cdot 10^9 \left( -\frac{2}{3} 10^{-9} \right) \left( \frac{1}{x} - \frac{2}{0,2} \right) = 6 \left( 10 - \frac{1}{x} \right).$$

Už sferų ( $d_2/2 < x \leq x_2$ ) elektrostatinio lauko stipris ir potencialas lygūs nuliui, nes juos lemia abiejų sferų krūvių suma  $q_1 + q_2 = 0$ :

$$E(x) = k \frac{q_1 + q_2}{x^2}, \quad \varphi(x) = k \frac{q_1 + q_2}{x}.$$

Verta atkreipti dėmesį į elektrostatinio lauko stiprio neapibrėžtumą (šuo!) ties sferų paviršiumi.

*Užduoties aiškinamąjį sprendimą pateikė jos autorius dr. Stasys Tamošiūnas.*

▲ Šis tekstas svetainėje [www.olimpas.lt](http://www.olimpas.lt) nuolat skelbiamas nuo 2012 11 26.

### **Turnyro dalyvių sprendimų aptarimas / FT6-6 ▼**

Ši užduotis daugeliui, ypač jaunesnių, dar elektrostatikos mokykloje nesimokiusių, turnyro dalyvių buvo sunkoka, bet jos aiškinamasis sprendimas turėtų padėti geriau suprasti sferų elektrostatinio lauko stiprio ir potencialo pasiskirstymo ypatumus sferiniame kondensatoriuje, kuriame vienodo dydžio ir priešingų ženklų elektros krūviams sferose esant nelygus nuliui elektrinio lauko stipris yra tik tarpe tarp sferų.

Dauguma turnyro dalyvių, kuriems pavyko rasti kondensatoriuje sukauptą energiją, naudojami formulė

$$W = \frac{q^2}{2C}$$

bei žinynuose rasta sferinio kondensatoriaus elektrinės talpos išraiška:

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} = \frac{1}{k\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)},$$

čia  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  F/m, o  $r_1 = d_1/2$  ir  $r_2 = d_2/2$  yra sferų spinduliai.

Verta čia priminti, kad sferinio kondensatoriaus elektrinę talpą galima rasti žinant jo įtampos priklausomybę nuo krūvio, kuri paprastai nustatoma integruojant mažesnės sferos elektrostatinio lauko stiprio priklausomybę nuo koordinatės:

$$U(q) = \int_{r_1}^{r_2} E(x)dx = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dx}{x^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = \frac{q}{C}.$$

Vienas turnyro dalyvis kondensatoriuje sukauptą energiją nustatė prilygindamas ją darbui, kuris atliekamas perkeliant elektros krūvį iš vienos sferos į kitą (mūsų atveju perkeliant elektronus iš didesnės sferos į mažesnę sferą) ir randamas integruojant įtampos priklausomybę nuo krūvio:

$$W = A = -\int_0^q U(q) dq = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Natūralu, kad gaunami tie patys rezultatai, kaip ir nagrinėjant potencialo pasiskirstymą. Kitas turnyro dalyvis daug nesivargino ir atsiuntė dalinio sprendimo skenuotą juodrašį.

*Užduoties sprendimų aptarimą parengė jos autorius dr. Stasys Tamošiūnas.*

▲ Šis tekstas svetainėje [www.olimpas.lt](http://www.olimpas.lt) nuolat skelbiamas nuo 2012 11 26.

#### **Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelė / FT6-6 ▼**

<b>Nr.</b>	<b>Sprendimų vertinimo kriterijus</b>	<b>Vertė balais</b>
1	Rasti krūvių tankiai	3
2	Apskaičiuotas lauko stipris taške A	1
3	Rasta energija	2
4	Nustatyta elektrinė įtampa tarp taškų A ir B	1
5	Nubrėžtos lauko stiprio ir potencialo priklausomybės nuo atstumo	3
6	Nėra paaiškinimų	-1
7	Pateikta ne pagal reikalavimus	iki -1
8	Kiti netikslumai p. 1-5	po -(0,1-0,5)
Didžiausias galimas sprendimo įvertinimas		10

*Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelę parengė užduoties autorius dr. Stasys Tamošiūnas.*

▲ Šis tekstas svetainėje [www.olimpas.lt](http://www.olimpas.lt) nuolat skelbiamas nuo 2012 11 26.