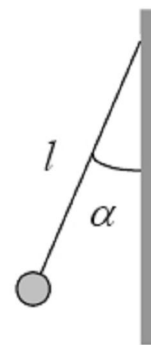


2-ASIS FIZIKOS TURNYRAS
Užduotis Nr. FT2-10 / 2009 01 19 – 2009 02 15

Užduoties sąlyga / FT2-10 ▼

Pririštas rutuliukas smūgiuoja į sieną

Prie $l=75$ cm ilgio netampraus lengvo siūlo pritvirtintas mažas rutuliukas. Kitas siūlo galas pritvirtintas prie vertikalią sieną. Rutuliukas atitraukiamas nuo sienos taip, kad siūlas sudarytų $\alpha=10^\circ$ kampą su vertikale ir paleidžiamas. Po smūgio į sieną rutuliukas atšoka, smūgio metu prarasdamas 20 % energijos.



1) Kiek laiko praėjus rutuliuko greitis nebeviršys 0,3 m/s? Į smūgio trukmę neatsižvelkite.

2) Nubraižykite, kaip kinta rutuliuko greitis per tą laiką.

Užduotį parengė 2-ojo Fizikos turnyro užduočių parengimo, jų pateikimo spresti ir atlikimo vertinimo komisijos pirmininkas prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

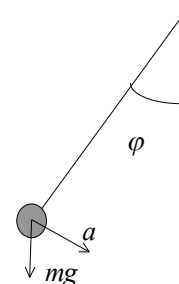
▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2009 03 09.

Užduoties aiškinamasis sprendimas / FT2-10 ▼

1) Rutuliuko judėjimą tarp smūgių aprašo lygtis

$$ml \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -mg \sin \varphi,$$

čia φ – siūlo atsilenkimo nuo vertikaliąs kampas.



Kadangi sąlygoje pateikti parametrai dviejų ženklų tikslumu, naudojame apytikslę išraišką $\sin \varphi = \varphi$ (kai $\varphi = \alpha \sin 10^\circ = \sin 0,1745 = 0,1736$, skirtumas sudaro 0,5 %).

Judėjimo lygtis tampa harmoninių svyravimų lygtimi:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \omega^2 \sin \varphi = 0, \quad \omega = \sqrt{g/l}, \quad T = 2\pi / \omega.$$

Jos sprendinys tarp smūgių į sieną

$$\varphi = \alpha_k \cos(2\pi / T + \varphi_k),$$

čia α_k – amplitudė, φ_k – pradinė fazė.

Pradžioje rutuliukas turi potencinės energijos

$$E = mgl(1 - \cos \alpha).$$

Paleistas rutuliukas juda išbėgėdamas link sienos, ir atsitrenkiant jo greitis yra

$$v = \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha)}.$$

Po smūgio greitis sumažėja ir sudaro $\sqrt{0,8}$ dalį greičio prieš smūgį. Atšokus rutuliukui nuo sienos jo greitis mažėja, maksimaliai atsilenkus siūlui rutuliukas sustoja ir vėl išbėgėdamas artėja link sienos. Po n smūgių į sieną atšokančio rutuliuko greitis bus

$$v_n = 0,8^{n/2} \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha)}.$$

Gauname lygtį

$$v_n \leq 0,3,$$

kurios sprendinys

$$n \geq 2 \lg[0,3/\sqrt{2gl(1-\cos\alpha)}] / \lg 0,8, \quad n \geq 4,1.$$

Kadangi n yra sveikas skaičius, imame $n=5$, t.y., mažesnis už 0,3 m/s greitis taps po penkto smūgio į sieną. Rutuliuko judėjimą aprašant svyravimu iki pirmojo smūgio į sieną praeina ketvirtadalis periodo, toliau tarp smūgių – po pusę periodo. Taigi, iki penkto smūgio praeis laikas

$$t = T(1/4 + 4/2) = T \cdot 9/2.$$

Kadangi $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, ieškomasis laikas

$$t = 9\pi\sqrt{l/g}, \quad t = 3,9 \text{ s.}$$

2) Rutuliuko judėjimą iki smūgio į sieną aprašo formulė

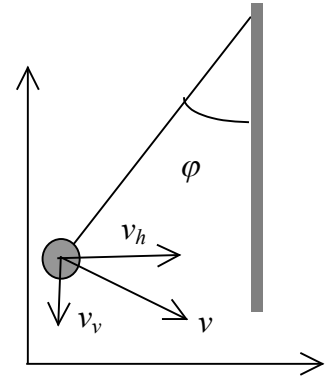
$$\varphi = \alpha \cos(2\pi t/T).$$

Rutuliuko greičio horizontalioji ir vertikalioji dedamosios yra atitinkamai:

$$v_h = \frac{d\varphi}{dt} \cos \varphi = v_0 \sin(2\pi t/T) \cos(\alpha \cos(2\pi t/T)),$$

$$v_v = \frac{d\varphi}{dt} \sin \varphi = -v_0 \sin(2\pi t/T) \sin(\alpha \cos(2\pi t/T)),$$

čia v_0 – greičio modulis prieš pat pirmąjį smūgį į sieną.

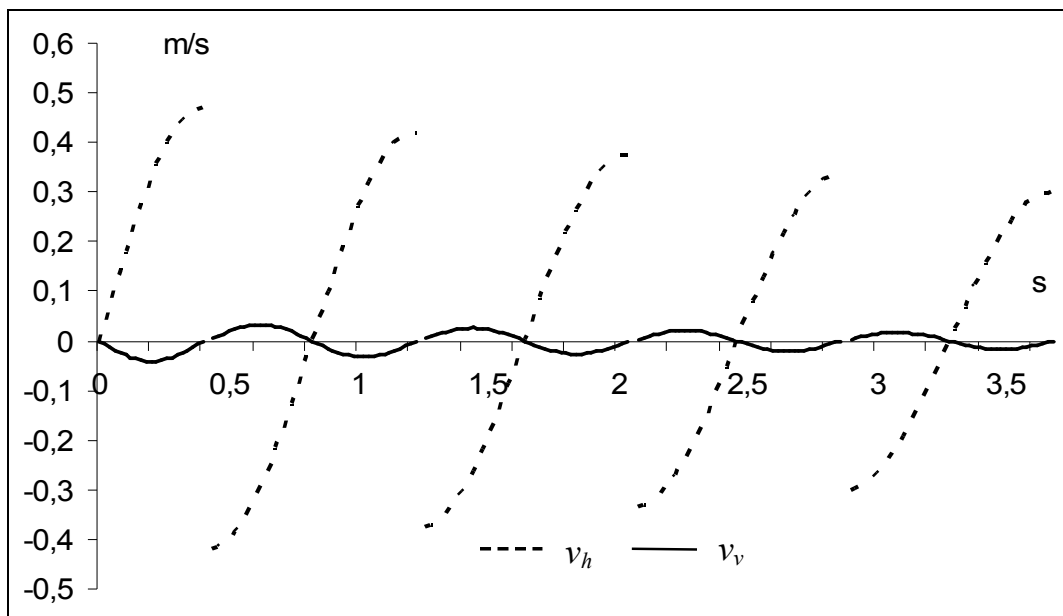


Po pirmojo smūgio greičio modulis tampa $v_1 = v_0\sqrt{0,8}$, maksimalus atsilenkimas tampa $a_1 = \alpha\sqrt{0,8}$, o svyravimo fazė pakinta dydžiu π .

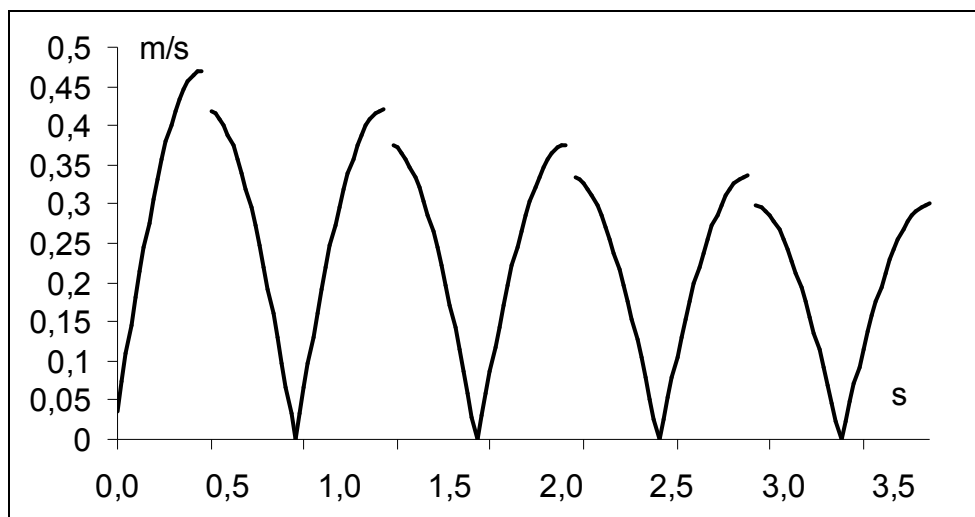
$$v_h = -v_1 \sin(2\pi t/T) \cos(\alpha_1 \cos(2\pi t/T)),$$

$$v_v = -v_1 \sin(2\pi t/T) \sin(\alpha_1 \cos(2\pi t/T)).$$

Analogiškai kinta amplitudė ir fazė ir po kitų smūgių. Pateikiame komponentių grafinį vaizdą iki penktojo smūgio.



Greičio modulis yra $v = \sqrt{v_h^2 + v_v^2}$, pateikiame jo grafiką.



Užduoties aiškinamąjį sprendimą pateikė užduoties autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2009 03 09.

Turnyro dalyvių sprendimų aptarimas / FT2-10 ▼

Dauguma sprendusiųjų taikė matematinės svyruoklės periodo ir atsilenkimo nuo pusiausvyros padėties formules, tačiau neįvertino tokio modelio tikslumo.

Grafiškai vaizduodami greitį daugelis neatsižvelgė, kad greitis – vektorius, todėl esamomis sąlygomis jį atitinka bent dvi dedamosios, o nurodant tik modulį greitis aprašomas nepilnai.

Dalis sprendusiųjų neatsižvelgė į tai, kad „nebevirsšys“ galioja visam tolimesniam rutuliuko judėjimo laikui, ir nurodė tik laiko momentą, kai rutuliuko greitis pirmą kartą po smūgio į sieną tampa mažesnis už 0,3 m/s.

Darbuose pasitaikė ir kitų pavienių netikslumų.

Užduoties sprendimo aptarimą parengė užduoties autorius ir jos sprendimų vertintojas prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2009 03 09.

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelė / FT2-10 ▼

Nr.	Sprendimų vertinimo kriterijus	Vertė balais
1.	Rutuliuko greitis pirmojo smūgio į sieną metu $v = \sqrt{2gl(1 - \cos\alpha)}$	1
2.	Rutuliuko greitis po n smūgių į sieną $v_n = 0,8^{n/2} \sqrt{2gl(1 - \cos\alpha)}$	1
3.	Harmoninių svyravimų lygties panaudojimo tikslumo įvertinimas ($\sin x = x$)	2
4.	Laiko nustatymas panaudojant matematinės svyruoklės periodo formulę	2
5.	Greičio horizontaliosios ir vertikaliosios dedamųjų grafikas	2
6.	Greičio modulio grafikas	2
7.	Pateikta ne pagal reikalavimus	-1
Maksimalus sprendimo įvertinimas		10

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelę parengė užduoties autorius ir jos sprendimų vertintojas prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2009 03 09.