36-OJI JAUNŲJŲ FIZIKŲ OLIMPIADA

X klasė

II ratas

1. **Kinoprojektorius projektuoja 8 kadrus per sekundę. Ekrane matome, kad automobilio ratai sukasi į priekį ir apsisuka 2 kartus per sekundę. Kokiu greičiu judėjo automobilis filmuojant, jei jo ratų skersmuo 1 m?**

Sprendimas

Tegul kinoprojektorius projektuoja k kadrų per sekundę, ir ekrane matome, kad ratas sukasi į priekį ir per sekundę apsisuka l kartų. Tai reiškia, kad filmuojant laiko intervale tarp dviejų gretimų ekspozicijų ratas spėdavo apsisukti

$$p = n + \frac{l}{k} \qquad (1)$$

kartų, kur n=0, 1, 2,... – bet koks sveikas skaičius. Pasinaudoję (1), automobilio ratų apsisukimo dažnį ν galėsime užrašyti taip:

$$\nu = m\left(n + \frac{l}{k}\right) \qquad (2)$$

kur m – ekspozicijų skaičius per sekundę filmuojant. Taigi mašinos greitis filmuojant

$$v = \pi \nu d = \pi m d\left(n + \frac{l}{k}\right), \qquad (3)$$

kur d – rato skersmuo.

Sąlygoje duota d=1m, l=2s^{-1}, k=8s^{-1}, o eksponavimo dažnis m neduotas. Todėl skaitmeniniame įvertinime laikysime m=k. Tokiu atveju iš (3) turime

$$v = 8\pi\left(n + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{m}{s}\right). \qquad (4)$$

Kadangi n gali būti bet koks sveikas skaičius, vienareikšmio atsakymo nėra. Kai n prilyginame 0, 1, 2,... atitinkamai gauname

$$v_0 = 22{,}6 km/h,$$
$$v_1 = 113 km/h,$$

$$v_2 = 203 km/h.$$

Taigi, jeigu automobilis nėra specialus lenktyninis, apie ką byloja palyginus didelis ratų skersmuo, realiais galime skaityti tiktai pirmuosius du sprendinius.

2. **Raketa, kurios masė 0,5kg, užtaisoma 1kg masės parako užtaisu, kuris degdamas sukuria pastovią 30N traukos jėgą ir sudega per 10s. Raketa paleidžiama stačiai aukštyn. Nubrėžkite raketos pagreičio priklausomybės nuo laiko grafiką, laikotarpiui, kiek didesniam už 10 s. Oro pasipriešinimo nepaisykite.**

Sprendimas

Raketą veikia variklio traukos jėga F_v, nukreipta stačiai aukštyn, ir sunkio jėga, nukreipta žemyn. Todėl raketą veikiančių jėgų atstojamoji

$$F = F_v - mg, \qquad (1)$$

kur m – raketos masė. Degant parakui, raketos masė tolygiai mažėja:

$$m = m_r + m_p(1 - kt). \qquad (2)$$

Čia m_r – raketos masė be parako, m_p – parako masė raketoje, prieš ją paleidžiant. Pažymėję laiką, per kurį sudega parakas, raide t_0, turime

$$k = \frac{1}{t_0}.$$

Turint tai omenyje, iš (2) gauname

$$m = m_r + m_p\left(1 - \frac{t}{t_0}\right). \qquad (3)$$

Pagreičiui rasti panaudosime antrąjį Niutono dėsnį, iš kurio, turint omenyje (1) ir (3), randame

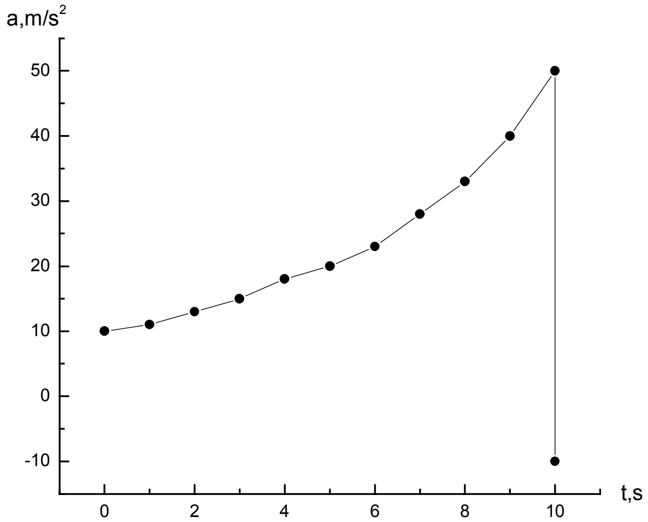
$$a = \frac{F}{m} = \frac{F_v - \left[m_r + m_p\left(1 - \frac{t}{t_0}\right)\right]g}{m_r + m_p\left(1 - \frac{t}{t_0}\right)}. \qquad (4)$$

Įstatę sąlygoje duotas F_v, m_r, m_p ir t_0 vertes ir laikydami $g=10m/s^2$, iš (4) gauname

$$a = \frac{15+t}{1{,}5 - 0{,}1t}\left(\frac{m}{s^2}\right).$$

Grafikui brėžti sudarome lentelę

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	10	11	13	15	18	20	23	28	33	40	50

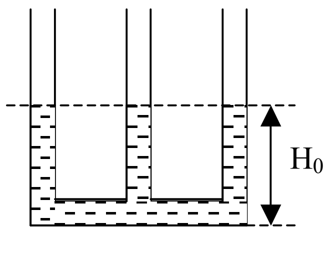


Parakui sudegus, variklio traukos jėga išnyksta, ir raketą veikia tik sunkio jėga, suteikianti jai pagreitį g, nukreiptą žemyn. Todėl, esant t=10s, pagreitis šuoliškai pakinta nuo $50m/s^2$ iki $-10m/s^2$.

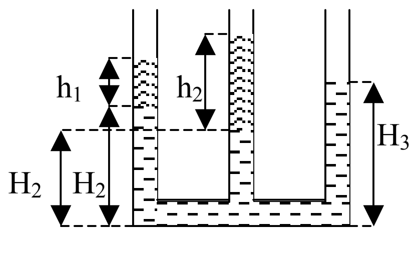
3. Į tris vienodo skerspjūvio susisiekiančius indus pripilta gyvsidabrio. Jo lygis žymiai aukštesnis už vamzdžių junginį. Į vieną iš vamzdžių įpilamas aukščio h_1=95,2mm, o į kitą – aukščio h_2=108,8mm vandens stulpeliai. Kiek pakils gyvsidabrio lygis trečiajame inde? Gyvsidabrio tankis ρ=13600kg/m^3.

Sprendimas

Pradinį gyvsidabrio stulpelio aukštį pažymėkime H_0 (1 pav.), o gyvsidabrio stulpelio aukščius 1, 2 ir 3 vamzdeliuose, įpylus į pirmuosius du vandens, - atitinkamai H_1, H_2 ir H_3 (2 pav.). Nusistovėjus pusiausvyrai, skysčio stulpelių svoris visuose vamzdeliuose turi būti vienodas. Todėl galioja lygybė



1 pav.

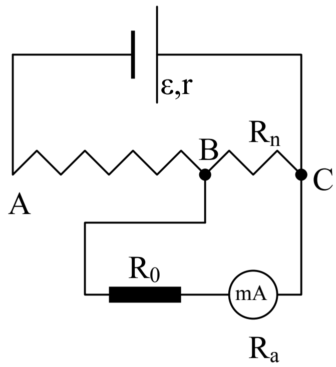


2 pav.

$$H_1\rho_g + h_1\rho_v = H_3\rho_g, \tag{1}$$
$$H_2\rho_g + h_2\rho_v = H_3\rho_g, \tag{2}$$
kur ρ_v ir ρ_g - vandens ir gyvsidabrio tankiai. Iš kitos pusės, kadangi gyvsidabrio kiekis nepakinta ir visų vamzdelių skerspjūviai vienodi,
$$H_1 + H_2 + H_3 = 3H_0.$$
Iš (1) ir (2) išreiškę H_1 bei H_2 ir įstatę gautas išraiškas į (3), randame
$$\Delta H = H_3 - H_0 = \frac{h_1 + h_2}{3}\frac{\rho_v}{\rho_g}.$$
Įstatę sąlygoje duotas h_1, h_2 ir ρ_g vertes bei skaitydami ρ_v=10^{3}kg/m^3, gauname
$$\Delta H = 5mm.$$

4. Duoti nežinomo storio plona (0,1 – 0,3mm skersmens) neizoliuota viela, nežinomos įtampos šaltinis, liniuotė, miliampermetras su nuosekliai įmontuota žinomo dydžio varža. Kaip galima rasti vielos savitąją varžą?

<u>Sprendimas</u>



<u>Pirmas būdas.</u> Sujungiame pav. parodytą schemą.
Čia AC – turima vieta, kurios savitąją varžą reikia rasti, ε ir r – turimo srovės šaltinio elektrovaros jėga ir vidaus varža, R_0 – žinomo dydžio varža, R_a – miliampermetro varža.
Visos vielos varžą pažymėkime R, o atkarpos BC varžą – R_n. Tuomet visos grandinės varža R_{AC} užsirašys taip:
$$R_{AC} = R - R_n + \frac{R_n(R_0 + R_a)}{R_0 + R_a + R_n} = R - \frac{R_n^2}{R_0 + R_a + R_n}. \tag{1}$$
Taigi šaltinio grandinėje tekės srovė
$$I = \frac{\varepsilon}{r + R_{AC}} = \frac{\varepsilon}{r + R - \dfrac{R_n^2}{R_0 + R_a + R_n}}. \tag{2}$$
Pasinaudoję (2), srovės stiprumui miliampermetro grandinėje gauname
$$I_a = I\frac{R_n}{R_0 + R_a + R_n} = \frac{\varepsilon R_n}{(r + R)(R_0 + R_a + R_n) - R_n^2}. \tag{3}$$
Varžas R ir R_n galime užrašyti taip:
$$\left.\begin{aligned} R &= \rho\frac{L}{S}, \\ R_n &= \rho\frac{l_n}{S}, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$
kur ρ – vielos savitoji varža, S – skerspjūvio plotas, L – vielos ilgis, l_n – vielos atkarpos BC ilgis. Įstatę (4) į (3), gauname
$$I_a = \frac{\varepsilon\rho\dfrac{l_n}{S}}{\left(r + \rho\dfrac{L}{S}\right)\left(R_0 + R_a + \rho\dfrac{l_n}{S}\right) - \left(\rho\dfrac{l_n}{S}\right)^2}. \tag{5}$$

L ir l_n išmatuojame liniuote. Galime rasti ir S. Tuo tikslu ant liniuotės vyniojame vielą vija prie vijos. Tegul užvyniojus N vijų apvyniotos dalies ilgis bus l_N. Tuomet vielos skersmenį rasime iš sąryšio

$$d = \frac{l_N}{N}. \qquad (6)$$

Žinodami d, S apskaičiuojame pagal formulę

$$S = \frac{1}{4}\pi d^2 = \frac{\pi l_N^2}{4N^2}. \qquad (7)$$

Kadangi srovės I_a dydį parodo miliampermetras, (5) išraiškoje turime keturis nežinomus dydžius – ε, ρ, r ir R_a. Tai reiškia, kad, norint sužinoti ρ, reikia slankųjį kontaktą B pastatyti keturiose skirtingose padėtyse, išmatuoti atitinkamus miliampermetro parodymus bei atkarpos BC ilgius. Tokiu būdu gausime 4 lygtis, iš kurių, eliminavę ε, r ir R_a, gautume lygtį savitajai varžai rasti. Deja, šis bendras atvejis labai sudėtingas. Todėl detaliau panagrinėsime paprastesnį ir praktiškai dažnai pasitaikantį atvejį, kai šunto vidaus varža yra labai maža ir galioja nelygybė $R_0 >> R_a$. Tuomet (5) lygybėje r ir R_a galima prilyginti nuliui ir gauname

$$I_a = \frac{\varepsilon l_n}{R_0 L + \rho \frac{l_n (L - l_n)}{S}}. \qquad (8)$$

Surandame dvi srovės vertes I_{a1} ir I_{a2}, atitinkančias vielos atkarpos ilgiams l_1 ir l_2. Sutinkamai su (8) turime

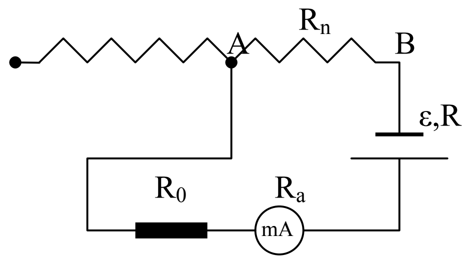
$$\left.\begin{aligned} I_{a1} &= \frac{\varepsilon l_1}{R_0 L + \rho \frac{l_1 (L - l_1)}{S}}, \\ I_{a2} &= \frac{\varepsilon l_2}{R_0 L + \rho \frac{l_2 (L - l_2)}{S}}. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Iš šios lygčių sistemos eliminavę ε, išreiškiame ρ:

$$\rho = \frac{SLR_0 (l_2 I_{a1} - l_1 I_{a2})}{l_1 l_2 [I_{a2}(L - l_2) - I_{a1}(L - l_1)]}. \qquad (10)$$

Antras būdas.

Jeigu iš nuosekliai sujungtų miliampermetro su varža, vielos ir srovės šaltinio sudarytoje grandinėje srovė yra mažesnė už maksimalią miliampermetro skalės vertę, ρ nustatymui galima naudoti pav. parodytą schemą. Paprastumo dėlei ir šį sykį nagrinėsime atvejį, kai su srovės šaltinio vidaus varža galima nesiskaityti ir galioja nelygybė $R_0 >> R_a$. Tuomet, vielos atkarpos AB varžą pažymėjus R_n, srovę sudarytoje grandinėje aprašys sąryšis



$$I = \frac{\varepsilon}{R_0 + R_n}. \qquad (11)$$

Parinkę dvi slankiojo kontakto A padėtis, kuriose vielos atkarpos AB ilgiai yra l_1 ir l_2, ir išmatavę atitinkamas srovės vertes I_1 ir I_2, (11) išraiškos pagalba gauname lygčių sistemą, pasinaudoję (4), randame tokią ρ išraišką

$$\rho = \frac{SR_0 (I_2 - I_1)}{I_1 l_1 - I_2 l_2}.$$

Sutinkamai su (7) pakeitę joje S per matuojamus dydžius, gauname

$$\rho = \frac{\pi l_N^2 (I_2 - I_1)}{4N^2 (I_1 l_1 - I_2 l_2)}.$$

5. Iš plonos ilgio L vielos pastoviu žingsniu suvyniota H aukščio spiralė ir įtvirtinta taip, kad jos ašis yra vertikali. Mažas karoliukas gali slysti spirale be trinties. Per kiek laiko karoliukas, paleistas nuo viršutinio taško be pradinio greičio, pasieks spiralės galą?

Sprendimas

Nesunku įsivaizduoti, kad, išvyniojus duotą spiralę, gautume aukščio H ir ilgio L nuožulnią plokštumą. Todėl karoliuko judėjimą išilgai vielos galima nagrinėti kaip kūno judėjimą nuožulnia plokštuma. Kadangi su trintimi nesiskaitome, antrasis Niutono dėsnis karoliukui užsirašys taip:

$$m\vec{a} = \vec{N} + m\vec{g},$$

kur m – rutuliuko masė, N – vielos reakcijos jėga. Iš šios lygties projekcijos į x ašį randame

$$a = g\sin\alpha = g\frac{H}{L}. \qquad (1)$$

Tokiu pagreičiu rutuliukas slys per visą vielą. Kadangi pradinis greitis lygus nuliui, turime

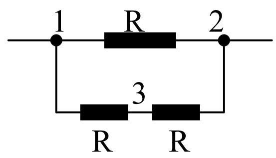
$$L = \frac{at^2}{2}.$$

Iš čia, pasinaudoję (1), randame

$$t = \sqrt{\frac{2L}{a}} = L\sqrt{\frac{2}{gH}}.$$

6. Kiekvienas iš N taškų su kitu sujungtas varža R. Kam lygi grandinės varža tarp bet kurių dviejų taškų?

Sprendimas



1 pav.

Panagrinėkime, kokia bus grandinės varža esant skirtingam taškų skaičiui N. Jeigu N=2, tai akivaizdu, kad grandinės varža

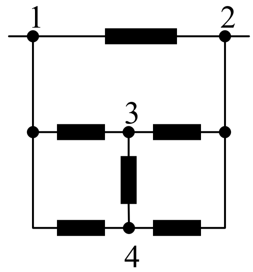
$$R_2 = R.$$

Kai N=3, varžų jungimo schema parodyta 1 pav. grandinės varža tarp taškų 1 ir 2 randama iš sąryšio

$$\frac{1}{R_3} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R},$$

iš kur

$$R_3 = \frac{2}{3}R.$$



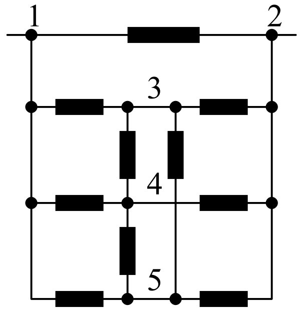
2 pav.

Kai N=4, varžų jungimo schemą galėsime pavaizduoti taip, kaip parodyta 2 pav. Matome, kad prijungus įtampą prie taškų 1 ir 2, taškai 3 ir 4 turi vienodą potencialą. Taigi su sujungimu tarp taškų 3 ir 4 galima nesiskaityti ir turime

$$\frac{1}{R_4} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R},$$

iš kur randame

$$R_4 = \frac{1}{2}R.$$



3 pav.

Kai N=5, varžų jungimo schema parodyta 3 pav. Ir vėl gavome, kad visų likusių taškų, išskyrus du, prie kurių prijungtas srovės šaltinis, potencialai yra lygūs. Todėl, skaičiuojant grandinės varžą, sujungimų tarp šių taškų galima neįskaityti. Gauname lyg tai grandinė susidėtų iš lygiagrečiai sujungtų varžos R ir trijų 2R dydžio varžų.

Analizuojant išnagrinėtus atskirus atvejus, pastebime, kad kiekvieno naujo taško pridėjimas srovės tekėjimo požiūriu veda dar prie vienos dviejų varžų grandinėlės lygiagretaus jungimo. Jeigu taškų yra N, tokių grandinėlių ekvivalentinėje schemoje bus (N-2). Taigi bendru atveju turime

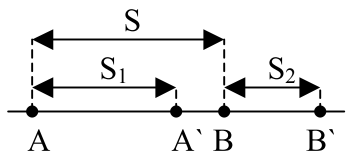
$$\frac{1}{R_N} = \frac{1}{R} + \frac{N-2}{2R}.$$

Iš čia gauname

$$R_N = \frac{2}{N}R.$$

7. Koreguojant kosminio laivo, judančio 9km/s greičiu: trajektoriją, įjungiamas variklis, kuris veikia 5s. variklis išmeta reaktyvinį dujų srautą 3km/s greičiu. Laivo greitis tolygiai padidėja iki 9,5km/s. Koks bus susidariusios veikiant varikliui dujų „uodegos“ ilgis praėjus 10s po variklio įjungimo?

Sprendimas



Laiką, kol veikia variklis, pažymėkime t_1, o visą laiką, kol stebėsime dujas – t. Pradinį raketos greitį pažymėkime v_0, greitį, nustojus veikti varikliui, - v_1 ir išmetamų dujų greitį – u. Kai, raketai esant taške A, ims veikti variklis, pradės formuotis dujų „uodega“. Šis „uodegos“ galas visą laiką judės iš inercijos greičiu (v_0-u) ir todėl po laiko t, kai mes fiksuosime „uodegos“ ilgį, atsidurs taške A\`. Atstumui S_1 turime

$$S_1 = (v_0 - u)t. \qquad (1)$$

Kadangi raketa greitėja tolygiai, vidutinis jos judėjimo greitis $v_{vid} = \frac{v_0 + v_1}{2}$. taigi po laiko t_1, kai nustos veikęs variklis, raketa atsidurs taške B, o jos nueitą atstumą rasime iš formulės

$$S = \frac{v_0 + v_1}{2}t_1. \qquad (2)$$

Taške B išmestos paskutinės dujos toliau judės iš inercijos greičiu (v_1-u). Taigi, po laiko (t-t_1) „uodegos“ dešinysis galas atsidurs taške B\`. Atstumą S_2 aprašys sąryšis

$$S_2 = (v_1 - u)(t - t_1). \qquad (3)$$

Iš aprašymo analizės seka, kad laiko momentu t dujų „uodega“ užims atkarpą A\`B\`. Jos ilgis

$$L := S + S_2 - S_1.$$

Pasinaudoję (1), (2) ir (3), gauname

$$L = \frac{v_0 + v_1}{2}t_1 - (v_1 - u)(t - t_1) - (v_0 - u)t.$$

Įstatę sąlygoje duotas skaitines dydžių vertes, randame

$$L = 18{,}75km.$$

8. Stalo teniso kamuoliukas be pradinio greičio krinta iš aukščio H_0. Apatiniame jo trajektorijos taške jis smūgiuojamas rakete iš apačios į viršų ir pašoka į N kartų didesnį aukštį, negu pradinis. Kokiu greičiu smūgio metu judėjo raketė? Nubrėžkite kamuoliuko pašokimo aukščio priklausomybės nuo raketės greičio grafiką, imant H_0=25cm. Smūgį laikykite tampriu. Oro pasipriešinimo nepaisykite.

Sprendimas

Prieš pat susiduriant su raketa, kamuoliuko greitis Žemės atžvilgiu $v_1 = \sqrt{2gH_0}$ ir jo projekcija į y ašį, pravestą aukštyn statmenai Žemės paviršiui, yra neigiama. Tegul raketės greičio projekcija į y ašį yra u. Tuomet kamuoliuko greičio raketės atžvilgiu projekcija prieš pat smūgį $v_{2y} = -u - \sqrt{2gH_0}$.Kadangi smūgis tamprus, kamuoliukas atšoks nuo raketės tokio pat dydžio, bet priešingos krypties greičiu.

Taigi iškart po smūgio kamuoliuko greičio raketės atžvilgiu projekcija

$$v_{3y} = u + \sqrt{2gH_0},$$

o Žemės atžvilgiu

$$v_y = 2u + \sqrt{2gH_0}. \qquad (1)$$

Tokiu greičiu stačiai aukštyn judantis kūnas pakils į aukštį

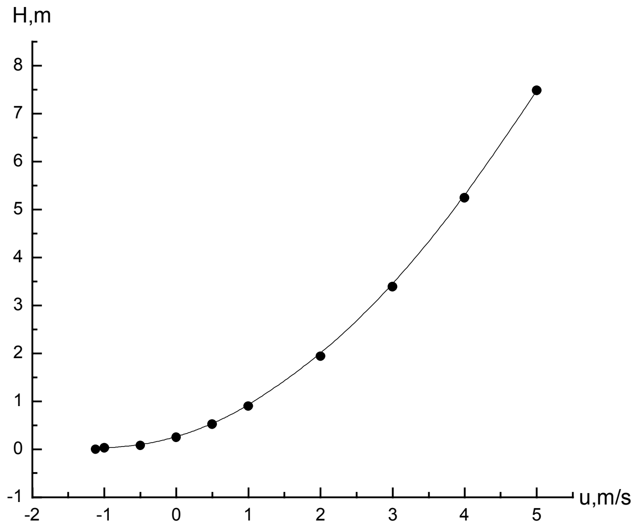
$$H = \frac{v_y^2}{2g} = \frac{(2u + \sqrt{2gH_0})^2}{2g}. \qquad (2)$$

Padalinę šią lygybę iš H_0, pažymėję $N=H/H_0$ ir išsireiškę iš gauto reiškinio u, randame

$$u = \sqrt{\frac{gH_0}{2}}(\sqrt{N} - 1).$$

Brėždami grafiką, naudojamės (2) išraiška. Sudarome lentelę ($g=10m/s^2$):

u,m/s	-1,12	-1	-0,5	0	0,5	1	2	3	4	5
H,m	0	0,03	0,08	0,25	0,52	0,9	1,94	3,4	5,24	7,48



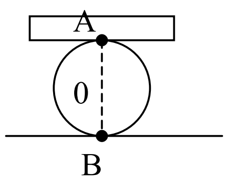
Pastebime, kad, kai H=0 (u=-1,12m/s), raketa smūgio metu juda ne tuo pačiu greičiu, kaip kamuoliukas, o dvigubai lėčiau už jį.

Eksperimentas

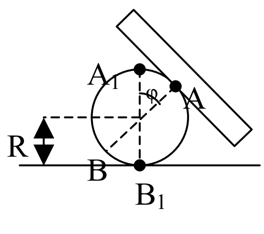
9. **<u>Užduotis.</u> Nustatykite dviejų strypelių tarpusavio trinties koeficientą. Raskite kelis būdus užduočiai išspręsti.**
   <u>Priemonės:</u> du skirtingo diametro apvalūs strypai, milimetrinio popieriaus juostelė.

<u>Sprendimas</u>

<u>Pirmas būdas.</u> Milimetrinio popieriaus juostelę patiesiame ant stalo ir ant jos paguldome didesnio diametro strypelį. Antrąjį strypelį uždedame ant storojo taip, kad abiejų strypelių ašys būtų statmenos ir plonasis strypelis būtų gulsčias (1 pav.). Pasižymime, kuriame taške B storasis strypelis liečia milimetrinį popierių. Po to, iš lėto ridename storąjį strypelį tol, kol plonasis ima slysti, ir pasižymime, kuriame taške B_1 dabar strypelis liečia milimetrinį popierių (2 pav.). Užsirašome, kokį atstumą $S=BB_1$ nuriedėjo storasis strypelis milimetriniu popieriumi. Storąjį strypelį apvyniojame milimetrinio popieriaus juostele ir, pasinaudoję sąryšiu $l=2\pi R$, surandame strypelio spindulį. Trinties koeficientą apskaičiuosime iš formulės



1 pav.



2 pav.

$$\mu = \tan\varphi, \qquad (1)$$

kur kampas φ yra tarp tiesių AO ir A_1O. Kadangi lankas

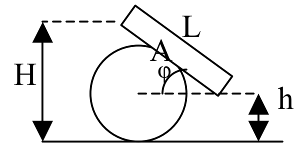
$$\cup AA_1 = S = \varphi R,$$

iš (1) turime

$$\mu = \tan\frac{S}{R}.$$

Antras būdas. Storąjį strypelį paguldome ant stalo.

Ant jo uždedame plonąjį taip, kad abiejų stulpelių ašys būtų statmenos ir, iš lėto sukdami storąjį strypelį, ieškome padėties, kai plonasis strypelis ims slysti. Keletą kartų kartodami šį veiksmą, milimetrinio popieriaus juostele išmatuojame, kokiame aukštyje virš stalo, prasidėjus slydimo procesui, būna apatinis ir viršutinis plonojo strypelio galas (3 pav.). Išmatuojame taip pat plonojo strypelio ilgį L. Žinodami H, h ir L, galime apskaičiuoti ir tuo pačiu nustatyti trinties koeficientą

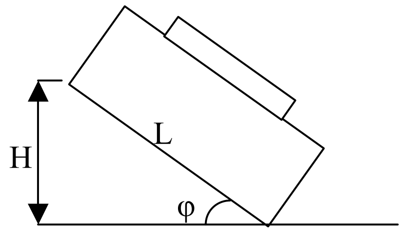


3 pav.

$$\mu = \tan\varphi = \frac{H-h}{\sqrt{L^2-(H-h)^2}}. \qquad (2)$$

Trečias būdas. Storąjį strypelį paguldome ant stalo ir ant jo paguldome plonąjį taip, kad jų ašys būtų lygiagrečios.

Po to iš lėto keliame vieną storojo strypo galą, pirštais švelniai prilaikydami plonąjį, kad nenusiristų. Išmatuojame, į kokį aukštį H pakėlus storąjį strypo galą, plonasis strypas ima slysti (4 pav.). Be to, išmatuojame strypo ilgį L. Trinties koeficientą apskaičiuojame pagal (1) formulę



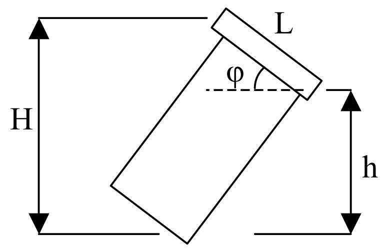
4 pav.

$$\mu = \tan\varphi = \frac{H}{\sqrt{L^2-H^2}}.$$

Plonojo strypo judėjimą stabdys ir pirštai. Tačiau, jeigu eksperimento metu pirštais tik švelniai prilaikysime plonąjį strypą, paklaida bus nedidelė.

Ketvirtas būdas.

Storąjį strypelį vienu galu pastatome ant stalo ir ant kito galo uždedame plonąjį strypą. Po to visą sistemą iš lėto verčiame tol, kol plonasis strypas ims slysti. Visa kita daroma visai taip pat, kaip ir antrojo būdo aprašyme – išmatuojame H, h ir L (5 pav.) ir pagal (2) apskaičiuojame trinties koeficientą.



5 pav.

Pastebime, kad šiuo atveju nustatyta trinties koeficiento vertė gali skirtis nuo verčių, gautų kitais būdais, nes strypelio galo paviršius gali skirtis nuo šoninio paviršiaus.

Užduotys ir sprendimai skelbiami iš leidinio:

TRISDEŠIMT ŠEŠTOJI JAUNŲJŲ FIZIKŲ OLIMPIADA. *Parengė V. Dienys*

Pastaba: ši informacija interneto svetainėje www.olimpas.lt skelbiama nuo 2006 03 28.