XL LIETUVOS JAUNŲJŲ FIZIKŲ OLIMPIADA

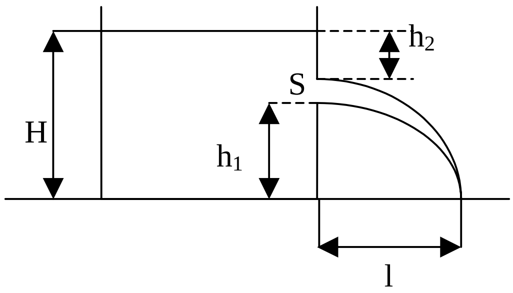
XI klasė

II ratas

1. **Sunkaus indo vertikalioje sienelėje anga išgręžta tokiame aukštyje, kad vanduo trykštų kuo toliau. Tuomet horizontalaus stalo vanduo krinta 1 m atstumu nuo indo sienelės. Raskite skylutės skerspjūvį, jei indą stalo paviršiuje esančios ašies atžvilgiu veikia 500 mNm jėgos momentas.**

Sprendimas

Skylutės aukštyje vandens hidrostatinis slėgis lygus $p = \rho g h_2$ (žr. pav.), ρ – vandens tankis.



Padarius skylutę, indo sieneles slegianti jėga sumažėja dydžiu:

$$F = pS = \rho g h_2 S, \qquad (1)$$

S – skylutės plotas. Skylutę veikia šios jėgos momentas

$$M = Fh_1 = \rho g h_1 h_2 S. \qquad (2)$$

Apskaičiuosime h_1 ir h_2. Vanduo iš skylutės išbėga greičiu $v = \sqrt{2gh_2}$ (Pagal Toričelio dėsnį), krenta žemyn laiką t, kai $h_1 = \frac{gt^2}{2}$ ir todėl

$$l = vt = 2\sqrt{h_1 h_2} = 2\sqrt{h_1(H - h_1)}. \qquad (3)$$

Sandaugos $h_1(H - h_1)$ išvestinę pagal h_1 prilyginę nuliui, pamatysime, kad ši sandauga (o tuo pačiu ir l) bus didžiausia, kai $h_1 = H/2$. Tuomet (žr. (3)) $l = 2\sqrt{\frac{H}{2}(H - \frac{H}{2})} = H = 1m,$ o $h_1 = H/2 = l/2$, $h_2 = H - h_1 = l/2$. Tad iš (2):

$$S = \frac{4M}{\rho g l^2}, \qquad (4)$$

$$S = 2cm^2.$$

Deja, toks sprendimas ne be priekaištų, o įtarimą kelia (1) lygtis. Vanduo juda, ir todėl atsiranda reaktyvinė jėga (panašiai kaip raketoje). Per laiką t pro skylutę išbėga

$$m = \rho S_0 vt \qquad (5)$$

vandens (S_0 – vandens čiurkšlės, o ne skylutės skerspjūvio plotas). Pagal judėjimo kiekio dėsnį $F_R t = mv$, F_R – reaktyvinė jėga, suteikianti vandeniui $v = \sqrt{2gh_2}$ greitį. Todėl $F_R = 2\rho g h_2 S_0$ (palyginkite su (1)). Į (2) lygtį vietoj F įrašę F_R, gauname:

$$S = \frac{2M}{\rho g l^2}, \qquad (6)$$

$$S = 1cm^2.$$

Šis atsakymas bendresnis už (4). Tačiau ir jis nėra galutinis. Mat (6) formulėje S_0 – tai vandens srovės (žr. (5)), o ne skylutės skerspjūvio plotas. O kam lygus S mes žinome. ((4) formulėje S – skylutės skerspjūvio plotas (žr. (1)), ir todėl (4) formulė galioja tik tuomet, kai vandens srovės skerspjūvis du kartus mažesnis už skylutės skerspjūvį). S_0 labai priklauso nuo skylutės kraštų formos. Mūsų konkrečiu atveju (esant paprastai skylutei) teisingas atsakymas, matyt, bus tarp 1 ir 2 cm^2, t.y.:

$$S = (1{,}5 \pm 0{,}5)cm^2.$$

2. **Iškūrenus krosnį, 36 m^3 tūrio kambaryje oro temperatūra pakilo nuo 12 ^{0}C iki 18^{0}C. Kiek pakito kambaryje esančio oro vidinė energija?**

Sprendimas

Kambaryje esančio oro vidinė energija U proporcinga oro masei m ir temperatūrai T:

$$U = A\frac{m}{\mu}RT, \qquad (1)$$

A – proporcingumo koeficientas. Idealioms dujoms A = const. Dujų būvio lygtis orui:

$$pV = \frac{m}{\mu}RT. \qquad (2)$$

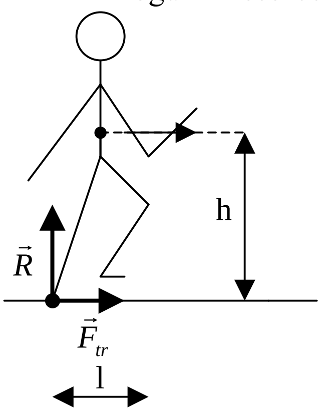
Iš (1) – (2): $U = ApV.$

Kambariai paprastai nebūna visiškai izoliuoti nuo aplinkos, todėl oro slėgis kambaryje p yra lygus atmosferos slėgiui. Atmosferos slėgį kambario šildymo metu galime laikyti pastoviu. Kambario tūris taip pat nekinta. Tad oro vidinė energija kambaryje nuo temperatūros nepriklauso (kiek kartų padidėja temperatūra, tiek kartų sumažėja jo kiekis).

3. **Apledėjus šaligatviui, trinties koeficientas tarp batų ir šaligatvio sumažėjo nuo 0,15 iki 0,05. Kiek kartų turime pakeisti žingsnio ilgį, kad eidami nesukluptume?**

Sprendimas

Einant žmogui masės centras juda pirmyn, o svoris perkeliamas nuo vienos kojos ant kitos (žr. pav.). Kojas veikia šaligatvio reakcijos jėga R ir trinties jėga F_{tr}. Žmogus nepaslys, jei jėgos R momentas žmogaus masės centro atžvilgiu bus ne didesnis už didžiausios trinties jėgos F_{trmax} momentą:



$$R\frac{l}{2} \le F_{tr\max}h.$$

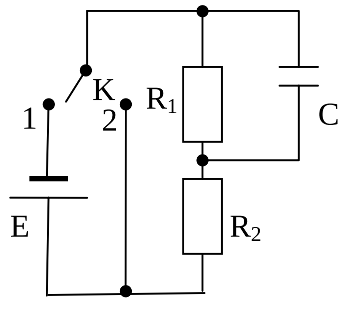
h – masės centro aukštis, l – žingsnio ilgis.

$$R = mg,\ F_{tr\max} = \mu mg$$

(μ – trinties koeficientas), todėl $l \le 2\mu g$.

Didžiausio žingsnio ilgis tiesiog proporcingas trinties koeficientui. Pastarajam sumažėjus tris kartus (nuo 1,5 iki 0,05) tiek pat kartų sumažės ir žingsnio ilgis.

4. **Kondensatorius įelektrinamas jungiklį K laikant padėtyje 1 (žr. pav.). Po to jungiklis perjungiamas į padėtį 2. Koks šilumos kiekis išsiskirs rezistoriuje R_1 išsielektrinant kondensatoriui? R_1 = 100 Ω, R_2 = 300 Ω, šaltinio EVJ E = 100 V, o jo vidinė varža maža. Kondensatoriaus talpa C = 1 μF.**



Sprendimas

Visas išsiskyręs šilumos kiekis yra lygus kondensatoriaus sukauptai energijai:

$$Q = \frac{CU^2}{2}. \qquad (1)$$

U – kondensatoriaus įtampa prieš perjungiant jungiklį:

$$U = E\frac{R_1}{R_1 + R_2}. \qquad (2)$$

Gali pasirodyti, kad kondensatorius išsikrauna per abu rezistorius. Deja, kondensatorius išsikrauna greičiau, nei spėjam pabaigti perjungimą. Krūvis ant kondensatoriaus plokštelių mažėja pagal dėsnį:

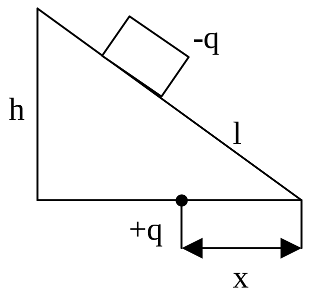
$$q = q_0 e^{-\frac{t}{RC}},\ q_0 = CU.$$

t – laikas nuo išsielektrinimo pradžios. Jei R = R_1, tai RC = 10^{-4}s. Kondensatorius išsielektrins per ≈10^{-3}s. Perjungimo trukmės daug didesnė (0,1 – 1s). Tad visa kondensatoriaus energija išsiskirs tik viename rezistoriuje R_1, kai jungiklis dar bus tarp 1 ir 2 padėčių. Iš (1) ir (2):

$$Q = \frac{CE^2 R_1^2}{2(R_1 + R_2)^2},$$

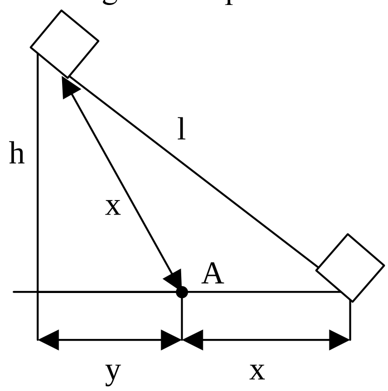
$$Q \approx 3 \cdot 10^{-4}\, J.$$

5. Nuožulnia plokštuma, kurios aukštis h, o ilgis l, čiuožia krūviu –q įelektrintas tašelis. Kokiu atstumu x nuo plokštumos galo po pagrindu reikia padėti krūviu +q įelektrintą kūną (žr. pav.), kad tašelio nuslydimo galutinis greitis nepriklausytų nuo krūvių dydžių? Trinties nepaisykite.



Sprendimas

Tašelio greitis nepriklauso nuo krūvių didumo. Jei krūvių sąveikos energija pradinėje ir galinėje padėtyse yra vienoda, t.y. vienodas jų tarpusavio atstumas (žr. pav.), tai pagal Pitagoro teoremą:



$$l^2 = h^2 + (x + y)^2,$$

$$x^2 = h^2 + y^2.$$

Iš pirmos lygties išreiškę y ir tai įstatę į antrąją lygtį, gauname:

$$x^2 = h^2 + (\sqrt{l^2 - h^2} - x)^2.$$

Iš čia

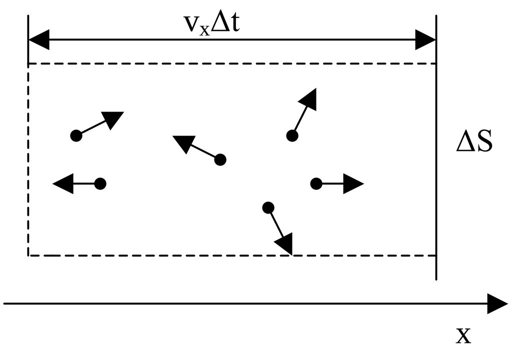
$$x = \frac{l^2}{\sqrt{2(l^2 - h^2)}}.$$

III ratas

6. Kiek vidutiniškai oro molekulių normaliomis sąlygomis per akimirksnį atsimuša į 10 nm skersmens dulkelę?

Sprendimas

Išskirkime dalelės paviršiuje plotą ΔS. Jei oro molekulės vidutinio kvadratinio greičio x – dėmuo v_x, tai į plotą ΔS per laiką Δt atsitrenkia pusė visų molekulių, esančių tūryje $\Delta S v_x \Delta t$ (žr. pav.). Atsitrenkia tik pusė molekulių, nes tik tiek jų lekia ΔS kryptimi. Kita pusė molekulių tolsta nuo ΔS. Jei molekulių koncentracija n_0, tai išskirtą plotą pasieks ΔN molekulių



$$\Delta N = \frac{1}{2} n_0 \Delta S v_x \Delta t,\ \ \Delta S = 4\pi R^2 = \pi D^2.$$

S – dalelės paviršiaus plotas, D – jos skersmuo. Kadangi

$$p_a = n_0 kT,$$

tai

$$N = \pi D^2 p_a \frac{v_x \Delta t}{2kT}. \qquad (1)$$

Paskaičiuosime, kam lygus v_x. Vidutinis kvadratinis greitis

$$v = \sqrt{\frac{3RT}{\mu_0}}, \qquad (2)$$

μ_0 – oro molio masė. Be to,

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2. \qquad (3)$$

v_x, v_y, v_z - vidutinio kvadratinio greičio dėmenys. Visos molekulių judėjimo kryptys lygiavertės, todėl

$$v_x^2 = v_y^2 = v_z^2. \qquad (4)$$

Iš (2) – (4):

$$v_x = \sqrt{\frac{RT}{\mu_0}}. \qquad (5)$$

Iš (1) ir (5) turėdami galvoje, kad R = kN_A, gauname:

$$N = \frac{1}{2}\pi D^2 p_a \Delta t \sqrt{\frac{N_A}{\mu_0 kT}}.$$

Pagal normaliųjų sąlygų apibrėžimą $p_a = 10^5$ Pa, T = 273 K. Akimirksnis trunka apie 0,1s, todėl

$$N \approx 1{,}2 \cdot 10^{11}.$$

Šį uždavinį galima spręsti ir kitais būdais. Priklausomai nuo jų tikslumo, atsakymai gali maždaug 2 kartus skirtis nuo ką tik gautojo.

7. Elektros lemputė įjungta į U_1 = 400 V įtampos tinklą, naudoja P_1 = 100 W galią, o jos siūlelis įkaista įjungus lemputę į U_2 = 200 V įtampos tinklą, jei tuomet ji naudoja P_2 = 50 W galią? Esant 0 ^{0}C temperatūrai siūlelio varža R_0 = 100 Ω.

Sprendimas

Jei siūlelio varžos prie t_1 ir t_2 temperatūrų yra R_1 ir R_2, tai

$$R_1 = R_0(1+\alpha t_1), \; R_2 = R_0(1+\alpha t_2), \qquad (1)$$

α – siūlelio varžos temperatūrinis koeficientas. Be to,

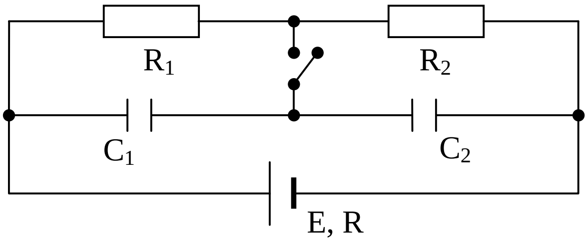
$$P_1 = \frac{U_1^2}{R_1}, \; P_2 = \frac{U_2^2}{R_2}. \qquad (2)$$

Iš (1) – (2):

$$t_2 = t_1 \frac{\frac{U_2^2}{P_2} - R_0}{\frac{U_1^2}{P_1} - R_0},$$

$$t_2 = 1400^0 C.$$

8. Kokia įtampa yra tarp kondensatoriaus gnybtų, kai raktas išjungiamas, ir kokia – raktą įjungus (žr. pav.)? E = 90V, $R_1 = 3R_2$ = 4R, $C_1 = 2C_2$.



Sprendimas

1) Nusistovėjus elektros srovei, per kondensatorius srovė neteka, o per rezistorius ji teka taip, tarsi kondensatorių nebūtų. Išjungus raktą, krintanti ant dviejų kondensatorių įtampa, yra lygi įtampai, krintančiai ant rezistorių R_1 ir R_2. Pagal Omo dėsnį:

$$I = \frac{E}{R + R_1 + R_2},$$

$$U = I(R_1 + R_2) = E\frac{R_1 + R_2}{R + R_1 + R_2}, \qquad (1)$$

$$U = U_1 + U_2.$$

I – grandine tekanti elektros srovė, U_1 ir U_2 – įtampos tarp kiekvieno kondensatoriaus plokštelių. Kondensatoriai sujungti nuosekliai ir todėl abu įsielektrina vienodais krūviai q

$$q = C_1U_1 = C_2U_2. \quad (2)$$

Iš (1) – (2):

$$U_1 = E\frac{R_1+R_2}{R+R_1+R_2}\frac{C_2}{C_1+C_2},$$

$$U_1 = 50{,}5V;$$

$$U_2 = E\frac{R_1+R_2}{R+R_1+R_2}\frac{C_1}{C_1+C_2},$$

$$U_2 = 25{,}3V.$$

2) Raktą įjungus, įtampa ant kondensatoriaus C_1 yra lygi įtampai ant rezistoriaus R_1:

$$U_{11} = E\frac{R_1}{R+R_1+R_2},$$

$$U_{11} = 56{,}8V.$$

Kondensatoriui C_2 atitinkamai:

$$U_{22} = E\frac{R_2}{R+R_1+R_2},$$

$$U_{22} = 18{,}9V.$$

9. Įvertinkite potencialų skirtumą tarp Žemės paviršiaus ir vidutinio žmogaus nosies lygio (1,5m), jei Žemės krūvio tankis lygus tūkstančiui elektronų krūvių kubiniame metre.

Sprendimas

Žemė turi neigiamą, atmosfera – teigiamą krūvį. Abu jie dalyvauja sukuriant elektrinį lauką. Žemėje esantis krūvis lygus:

$$Q = \frac{4}{3}\pi R_0^3 \cdot 1000 \cdot e, \quad (1)$$

R_0 – Žemės spindulys, e – elektrono krūvis. Krūvis Q už Žemės paviršiaus ir žmogaus nosies lygio sukuria potencialų skirtumą

$$U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_0} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (R_0+h)} \approx \frac{Qh}{4\pi\varepsilon_0 R_0^2}. \quad (2)$$

Iš (1) – (2):

$$U \approx \frac{1000\cdot ehR_0}{3\varepsilon_0},$$

$$U \approx 58V.$$

Krūvio tankis atmosferoje kitoks, nei Žemėje, tačiau to krūvio dydis turėtų būti lygus Žemės krūviui Q su priešingu ženklu, nes tuomet Žemė su atmosfera išlieka neutrali. Tarkime, kad beveik visas atmosferos krūvis susikaupęs D = 10 km storio prigludusiame prie Žemės atmosferos sluoksnyje. Atmosferos krūviai, esantys virš nosies lygio, nesukuria potencialų skirtumo žemiau nosies lygio. Tad belieka panagrinėti tik atmosferos sluoksnį tarp Žemės ir nosies. $h \ll R_0$, $D \ll R_0$ ir todėl sluoksnių tūris, o tuo pačiu ir jų krūvis tiesiog proporcingas tų sluoksnių storiui. h storio sluoksniui teks krūvis:

$$Q_1 = -Q\frac{h}{D}. \quad (3)$$

$h/D \approx 10^{-4}$, o tuo pačiu $Q_1 \ll Q$, ir todėl šio sluoksnio sukurtas potencialų skirtumas U_1 tarp Žemės ir nosies lygio bus daug kartų mažesnis už U ir įtakos galutiniam rezultatui praktiškai neturės. Tačiau krūvių tankis atmosferoje prie Žemės paviršiaus kur kas didesnis, nei tai seka iš (3) formulės (krūvis atmosferoje pasiskirstęs netolygiai). Jei atmosferos krūvių tankis ≈ $5 \cdot 10^7$ elektronų krūvių kubiniame metre, tai potencialų skirtumas U_1 ≈ - 1V. Galutinis potencialų skirtumas $U + U_1$ ≈ 57 V nedaug skiriasi nuo anksčiau gauto atsakymo. Panašus (paprastai šiek tiek didesnis) potencialų skirtumas iš tikro yra mus supančiame ore. 57 V – tai pakankamai didelė įtampa, tačiau žmogaus ji nei krečia, nei trenkia. Kodėl? Paaiškinimas paprastas: oras yra dielektrikas, jo savitoji varža daug didesnė už žmogaus savitąją varžą. Žmogaus varža maža, ir todėl, stovėdamas ant Žemės, žmogus praktiškai turi tokį patį potencialą kaip ir Žemės. Žmogaus nosis ir Žemės paviršius sudaro ekvipotencialinį paviršių. Mūsų gautas atsakymas – 57 V (arba 58 V) – tai potencialų skirtumas iki nosies lygio. Bet ne iki pačios nosies. Atmosferoje aplink žmogų esančios elektrinio lauko ekvipotencialinės linijos išlinksta. Praktiškai niekas nepasikeičia ir žmogui pašokus į orą – žmogaus įsielektrinimas vyksta labai lėtai (nes aplinkui – dielektrikas). Atitinkamai – labai maža ir elektros srovė.

10. Plonas žiedas, kurio spindulys R, tolygiai įelektrintas krūviu Q. Žiedo centre yra maža masės M ir krūvio q dalelė (Q ir q krūvių ženklai tie patys). Kokį greitį įgis dalelė, nulėkusi toli nuo žiedo?

Konstantų vertės: elektrono krūvis $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19} C,$ **elektrinė konstanta** $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} F/m,$ **Bolcmano konstanta** $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23} J/K,$ **oro molio masė** $\mu_0 = 29 g/mol$**, Avogadro skaičius** $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23} mol^{-1},$ **Žemės spindulys** $R_0 = 6400 km.$

Sprendimas

Suskirstę žiedą smulkiais elementais, kurių kiekvieno krūvis ΔQ, jų sukuriamą potencialą žiedo centre galime išreikšti Kulono dėsniu:

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta Q}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

Žiedas plonas, todėl visi jo elementai nuo centro nutolę vienodu atstumu R. Susumavus visų elementų sukurtus potencialus:

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}. \tag{1}$$

Dalelei tolstant nuo žiedo (nes Q ir q stumia vienas kitą), jos potencinė energija virsta kinetine energija, o pakankamai toli nuo žiedo praktiškai visa potencinė energija būna virtusi kinetine (pagal energijos tvermės dėsnį). Tad, laikant žiedą nejudančiu:

$$q\varphi = \frac{mv^2}{2}. \tag{2}$$

Iš (1) – (2):

$$v = \sqrt{\frac{qQ}{2\pi\varepsilon_0 mR}}.$$

Jei žiedas neįtvirtintas, tai ir jis pradės judėti. Tuomet:

$$q\varphi = \frac{mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2}. \tag{3}$$

M ir u – žiedo masė ir galutinis greitis. Pagal judesio kiekio tvermės dėsnį:

$$mv = Mu. \tag{4}$$

Iš (1), (3) ir (4):

$$v = \sqrt{\frac{qQM}{2\pi\varepsilon_0 m(m+M)R}},$$

$$v + u = \sqrt{\frac{qQ(m+M)}{2\pi\varepsilon_0 mMR}}.$$

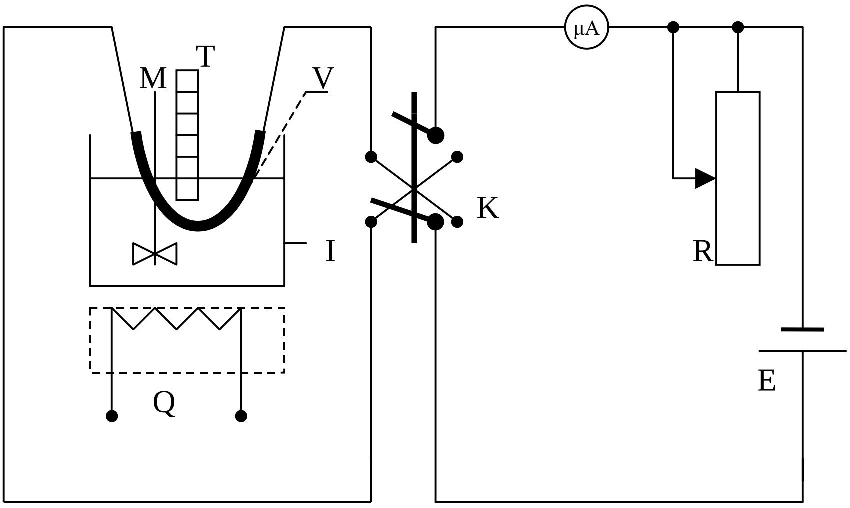
v ir v +u – dalelės greičiai Žemės ir žiedo atžvilgiu.

Eksperimentas

11. Paruoškite 15% druskos tirpalą ir ištirkite jo savitojo elektrinio laidumo priklausomybę nuo temperatūros.

Prietaisai ir medžiagos: druska, indas su vandeniu, svarstyklės, lenktas 1 mm skersmens vamzdelis, elektros plytelė, nuolatinės srovės šaltinis, reostatas, mikroampermetras, komutatorius (srovės perjungėjas), laidai, stovas, vandens maišiklis ir termometras.

Sprendimas



Tyrimo schema pavaizduota pav. V – vamzdelis su tiriamuoju tirpalu, I – indas su vandeniu, T – termometras, Q – elektros plytelė, M – vandens maišiklis, K – komutatorius, μA – mikroampermetras, R – reostatas, E – srovės šaltinis. Tirpalą paruošiame svarstyklėmis parinkdami vandens ir druskos kiekius. Surenkame elektros grandinę, pagal jau aprašytą tyrimo schemą. Srovei tekant vyksta elektrodų poliarizacija, kuri mažina tą srovę. Tokios paklaidos išvengiame kaitaliodami srovės kryptį komutatoriumi K.

Tam tikram laikui įjungiame elektros plytelę, palengva didiname skysčių temperatūrą. Kartas nuo karto, esant skirtingai temperatūrai, išmatuojame tirpalo varžą R:

$$R = \rho\frac{l}{S} = \frac{4\rho l}{\pi d^2}. \qquad (1)$$

S, ρ ir l – vamzdelio vidinio skerspjūvio plotas, tirpalo savitoji varža ir užimamas ilgis. Ilgį l sužinotumėme išmatavę tirpalo tūrį. Tirpalo tankis apytiksliai lygus vandens tankiui ρ_v, todėl tūris

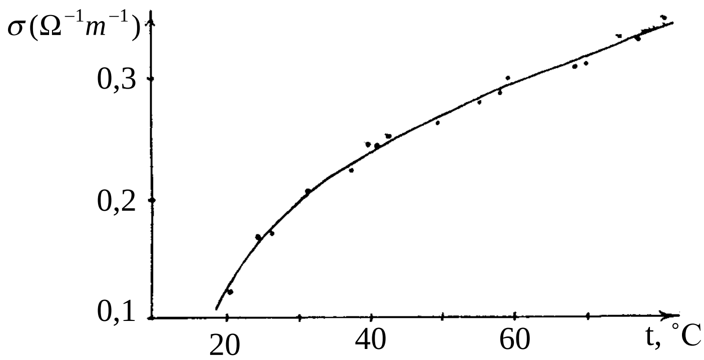
$$V = Sl = \frac{m}{\rho_v}, \qquad (2)$$

m – tirpalo masė, kurią apskaičiuojame pasvėrę vamzdelį su tirpalu ir be jo.

Savitasis tirpalo laidumas
$$\sigma = \frac{1}{\rho}. \qquad (3)$$

Iš (1) – (3):
$$\sigma = \frac{16m}{\rho_v \pi^2 d^4 R}.$$

Rezultatai grafiškai pavaizduoti pav.:



Užduotys ir sprendimai skelbiami iš leidinio:

40-OJI LIETUVOS JAUNŲJŲ FIZIKŲ OLIMPIADA. *Parengė Raimundas Žemaitis*

Pastaba: ši informacija interneto svetainėje www.olimpas.lt skelbiama nuo 2005 04 26.