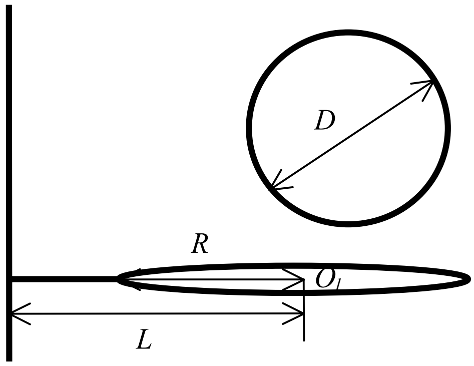
55-oji Lietuvos moksleivių fizikos olimpiada
12 klasės užduotys

1. Krepšinio kamuolio skersmuo $D = 240\ \mathrm{mm}$, krepšio lanko spindulys $R = 225\ \mathrm{mm}$, o lanko centro atstumas iki lentos $L = 370\ \mathrm{mm}$. Krepšininkas, stovėdamas tiesiai priešais lentą, nori pataikyti kamuolio centru tiksliai į krepšio lanko centrą. Kokiu kampu α į horizontą jis turi mesti kamuolį? Pradinis kamuolio greitis $v_0 = 9\ \mathrm{m/s}$, kamuolio centras metimo momentu yra lanko lygyje ir atstumu $s = 6{,}5\ \mathrm{m}$ iki lanko centro. Kokiu kampu *β* į horizontą jis turi mesti kamuolį, jeigu nori pataikyti į lanko centrą kamuoliui atšokus nuo lentos? Oro pasipriešinimo nepaisykite, smūgį į lentą laikykite akimirksniniu. Laisvojo kritimo pagreitis $g = 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$.



<u>Sprendimas</u>

Naudojame žinomą formulę kūnui mestam kampu į horizontą:

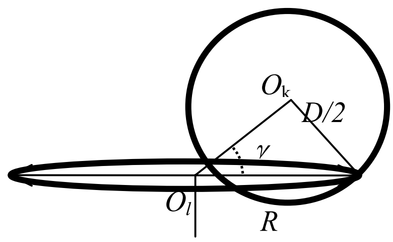
$$s = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha .$$

Iš čia

$$\sin 2\alpha = \frac{sg}{v_0^2}, \quad 2\alpha_1 = \arcsin\frac{sg}{v_0^2}, \quad 2\alpha_2 = 180° - \arcsin\frac{sg}{v_0^2},$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\arcsin\frac{sg}{v_0^2} \approx 26°, \quad \alpha_2 \approx 64°.$$

Tai matematiškai teisingas atsakymas. Tačiau pirmas iš jų krepšininkui netinka, nes kamuolys, artėdamas prie lanko žema trajektorija, užkabins lanką. (Kadangi metimo taškas yra lanko lygyje, artėjimo kampas yra lygus metimo kampui.) Netgi, jeigu kamuolys artėtų prie lanko tiesia trajektorija, kad neužkabintų lanko jis turi judėti kampu $\gamma = \arcsin\dfrac{D}{2R} \approx 32°.$ Realiai jis judės parabole dar truputi žemiau. Kadangi trajektorija yra simetriška, jis turi būti išmestas kampu didesniu negu $32°$. Lieka tik viena kampo reikšmė.



Atšokimo nuo lentos atvejis yra pavaizduotas paveiksle. Iš paveikslo matyti, kad metant su atšokimu nuo lentos atstumas tartum padidėja dydžiu

$\Delta s = 2(L - D/2)$.

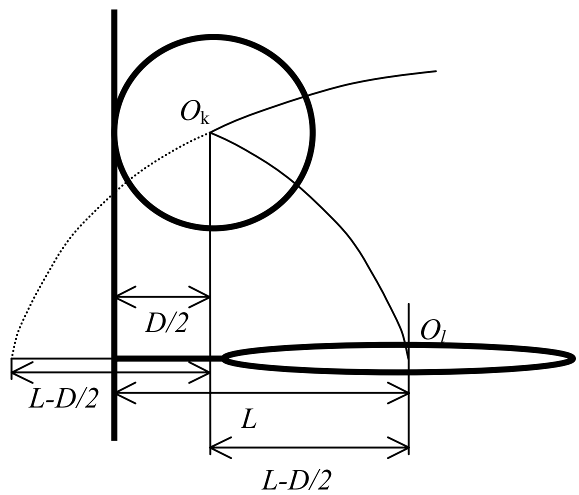
Tada

$$s + 2(L - D/2) = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\beta .$$

Spręsdami kaip ir pradžioje gauname

$\beta_1 \approx 30°, \quad \beta_2 \approx 60°.$

Kaip ir aukščiau pirmąją reikšmę reikia atmesti.



Atsakymas: $\alpha = 64°, \quad \beta = 60°.$

2. Šeši masės *m* taškiniai kūnai yra taisyklingo šešiakampio viršūnėse. Šešiakampio kraštinės ilgis *R*. Kiekvienas kūnas turi krūvį *q*. Krūvių ženklai šešiakampyje pakaitomis keičiasi. Kiek laiko praeis iki kūnų susidūrimo, jeigu jie sąveikauja tik pagal Kulono dėsnį?

Sprendimas

Pirmiausia išanalizuosime jėgas, veikiančias vieną iš krūvių.

$$F_1 = F_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{R^2},\quad F_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{4R^2},\quad F_4 = F_5 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{3R^2}.$$

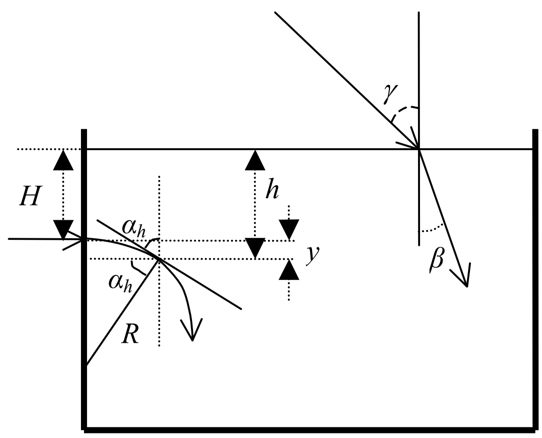
Tų jėgų vektorinė suma $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2\left(\frac{5}{4}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}{R^2}$ nukreipta į šešiakampio centrą. Iš šios išraiškos matome, kad penkių krūvių veikimą galima pakeisti vienu efektyviu krūviu $Q = q\left(\frac{15-4\sqrt{3}}{12}\right)$, patalpintu į šešiakampio centrą. Kadangi uždavinys yra simetriškas, visus krūvius veiks vienodo dydžio jėgos, nukreiptos į centrą, jie judės vienodais pagreičiais ir užduota uždavinio simetrija išsilaiko. Tokiu atveju kiekvieno krūvio judėjimas bus analogiškas judėjimui gravitaciniame lauke. Krūvis judės išsigimusios elipsės trajektorija, o judėjimo iki centro laikas lygus pusei periodo $t = \frac{1}{2}T$. Šiam judėjimui galioja Keplerio dėsniai. Vadinasi visas periodas yra lygus judėjimui tame pačiame traukos lauke apskritimine spindulio $r = R/2$ (pusė elipsės didžiosios pusašės) orbita.

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2\left(15-4\sqrt{3}\right)}{12r^2} = mr\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2.$$

Atsakymas: $t = \frac{1}{q}\sqrt{\frac{6\pi^3\varepsilon_0 mR^3}{15-4\sqrt{3}}}.$

3. Akvariumas užpildytas skysčiu, kurio lūžio rodiklis priklauso nuo skysčio gylio *h* pagal tą patį dėsnį visame tūryje. Horizontalus šviesos spindulys patenka į akvariumą per vertikalią stiklinę sienelę atstumu *H* nuo skysčio viršutinio paviršiaus. Šiame taške skysčio lūžio rodiklis sutampa su stiklo lūžio rodikliu n_0. Toliau spindulys sklinda žemyn spindulio *R* apskritimu. Kam būtų lygus lūžio kampas, kritus tam spinduliui kampu γ į laisvą skysčio paviršių?

Sprendimas



Kadangi spindulys kris iš oro $\frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = n_{h=0}$.

$\beta = \arcsin\left(\frac{\sin\gamma}{n_{h=0}}\right)$. Dabar reikia nustatyti skysčio lūžio rodiklį prie paviršiaus ($h = 0$). Pagal lūžio dėsnį $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}$, t. y. $n_i \sin\alpha_i = const$. Tai galioja ir tuo atveju, kai šviesos lūžio rodiklis kinta tolygiai. Lazerio spindulys patenka į skystį horizontaliai, t. y. jo kritimo kampas į įsivaizduojamus horizontalius paviršius, skiriančius skystį su skirtingomis lūžio rodiklio vertėmis, yra lygus 90°. Vadinasi $n(h)\sin\alpha_h = n_0$. Kadangi spindulys sklinda apskritimu, bet kuriame jo trajektorijos taške $\sin\alpha_h = \dfrac{R-y}{R}$, kur $y = h - H$ – nusako, kiek spindulys nusileido nuo patekimo taško, o h – nagrinėjamo taško gylis. Gauname $n(h) = \dfrac{n_0 R}{R+H-h}$, $\quad n_{h=0} = \dfrac{n_0 R}{R+H}$.

Atsakymas: $\beta = \arcsin\left(\dfrac{R+H}{n_0 R}\sin\gamma\right)$**.**

4. Anglies atomas juda priešpriešiais lazerio spinduliui, kurio šviesos kvantus gerai sugeria ir greitai spontaniškai išspinduliuoja. Kiek sumažės atomo greitis po N = 1000 tokių įvykių? Įvertinkite, kokį atstumą atomas nueis per tą laiką, jeigu jo pradinis greitis v_0 = 1 km/s, o sugertis vyksta maždaug kas $\tau = 1\ \text{ns}$? Atominė masė m_u = 1,66·10^{-27} kg, Planko konstanta $h = 6{,}626\cdot10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}$, lazerio šviesos bangos ilgis λ = 128 nm.

Sprendimas

Toks procesas naudojamas atomams šaldyti lazerio šviesa. Jo esmę sudaro tai, kad atomas visą laiką absorbuoja tos pačios krypties fotonus, gaudamas jų judesio kiekį, o spontaniškai išspinduliuoja kvantus su vienoda tikimybe bet kuria kryptimi. Vadinasi, vidutinis impulsas, gaunamas po didelio kiekio išspinduliuotų fotonų, apytiksliai lygus nuliui ir mus domina tik sugertų fotonų impulsas.

$M_{\text{An}}\Delta v = Np_{\text{f}}$, $M_{\text{An}} = 12m_{\text{u}}$, $p_{\text{f}} = m_{\text{f}}c$, $m_{\text{f}}c^2 = h\dfrac{c}{\lambda}$.

$\Delta v = N\dfrac{h}{12m_{\text{u}}\lambda} \approx 260$ m/s.

Sugerties procesas, vykstantis su trumpais maždaug lygiais laiko tarpais, kiekvieną kartą mažina atomo greitį tuo pačiu dydžiu, vadinasi judėjimą galima laikyti panašiu į tolygiai lėtėjantį. Tokiu atveju nueitas kelias $s = \dfrac{v_0 + v_{\text{g}}}{2}N\tau = \dfrac{2v_0 - \Delta v}{2}N\tau \approx 0{,}87$ mm.

Atsakymas: $\Delta v \approx 260\ \text{m/s}$, $\quad s \approx 0{,}87$ mm.

5. Gamtoje randamas uranas turi 99,27 % urano-238 atomų ir 0,73 % urano-235 atomų. Šių izotopų pusėjimo trukmės yra $T_{238} = 4{,}47\cdot10^9$ metų ir $T_{235} = 0{,}704\cdot10^9$ metų. Įvertinkite Žemės amžių, laikant, kad susidarant Žemei urano izotopų kiekiai buvo vienodi. (Pusėjimo trukme vadinamas laikas per kurį suskyla pusė pradinio branduolių kiekio.)

Sprendimas

Radioaktyvios medžiagos atomų kiekis kinta pagal dėsnį $n = n_0 2^{-\frac{t}{T}}$.

Pažymėsime Žemės amžių T, pradinį kiekvieno urano izotopo atomų kiekį n_0, o dabartinius kiekius n_{238} ir n_{235}.

$$n_{238} = n_0 2^{-\frac{T}{T_{238}}},\ n_{235} = n_0 2^{-\frac{T}{T_{235}}},\ \frac{n_{238}}{n_{235}} = 2^{\frac{T}{T_{235}} - \frac{T}{T_{238}}},\ \frac{n_{238}}{n_{235}} = 2^{T\left(\frac{1}{T_{235}} - \frac{1}{T_{238}}\right)}.$$

$$\ln\frac{n_{238}}{n_{235}} = T\left(\frac{1}{T_{235}} - \frac{1}{T_{238}}\right)\ln 2,$$

$$T = \frac{T_{235}T_{238}\ln\dfrac{n_{238}}{n_{235}}}{(T_{238} - T_{235})\ln 2} = \frac{0{,}704\cdot10^9\cdot4{,}47\cdot10^9}{4{,}47\cdot10^9 - 0{,}704\cdot10^9}\cdot\frac{\ln\left(\dfrac{99{,}27}{0{,}73}\right)}{\ln 2}\ \text{metų} = 5{,}92\cdot10^9\ \text{metų}.$$

Atsakymas $T \approx 6\cdot10^9$ metų **.**

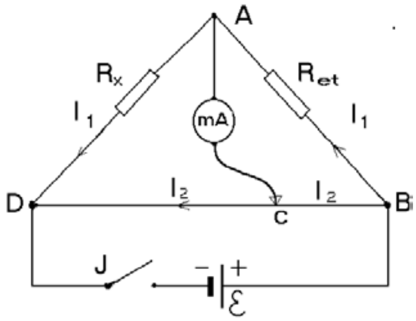
Eksperimentinė užduotis

Raskite **duotojo nuolatinės srovės šaltinio elektrovarą ir jo vidaus varžą. Darbą atlikite eksperimentiniu ir grafiniu metodais. Įvertinkite matavimo paklaidas.**

Priemonės: **nuolatinės srovės šaltinis, miliampermetras (0-5 mA; vidaus varža nežinoma), reochordas, etaloninis rezistorius (R_{et} = 2 Ω), žinomos varžos rezistorius (R=300 Ω), nežinomos varžos laidas, jungiklis, milimetrinis popierius, laidų komplektas (varžos nepaisyti).**

Sprendimas

1. Randame duotojo laido varžą R_x. Sujungiame grandinę (Vinstono tiltelis) pagal pateiktą schemą (pav. 1). Įjungus jungiklį J, reochordo šliaužiklis paslenkamas taip, kad šaka AC netekėtų elektros srovė. Tuomet taško A potencialas φ_A bus lygus taško C potencialui φ_C:



pav. 1

$$\varphi_A = \varphi_C$$

Remiantis Omo dėsniu grandinės daliai rašome:

$$U_{AD} = I_1 R_X \quad (1) \quad \text{ir} \quad U_{AB} = I_1 R_{et} \quad (3)$$

$$U_{DC} = I_2 R_{DC} \quad (2) \quad \text{ir} \quad U_{BC} = I_2 R_{BC} \quad (4)$$

Kadangi $\varphi_A = \varphi_C$, tai $U_{AD} = U_{DC}$ ir $U_{AB} = U_{BC}$

Sulyginę (1) su (2) ir (3) su (4) gauname:

$$I_1 R_X = I_2 R_{DC} \quad \text{ir} \quad I_1 R_{et} = I_2 R_{BC}$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_{DC}}{R_X} (5) \qquad \frac{I_1}{I_2} = \frac{R_{BC}}{R_{et}} \quad (6)$$

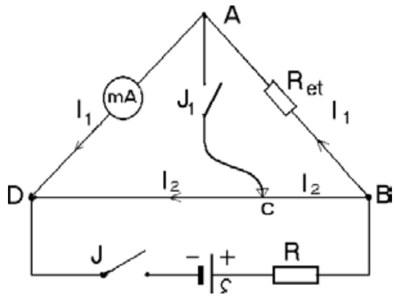
Sulyginame (5) ir (6) :

$$\frac{R_{DC}}{R_X} = \frac{R_{BC}}{R_{et}} \quad , \quad R_X = \frac{R_{DC}}{R_{BC}} R_{et}, \text{ kur } R_{DC} = \rho \frac{l_{DC}}{S}; \; R_{BC} = \rho \frac{l_{BC}}{S}$$

Gauname $R_X = \dfrac{l_{DC}}{l_{BC}} R_{et}$.

2. Norėdami išmatuoti miliampermetro vidaus varžą, jį jungiame į grandinę vietoje nežinomos varžos laido, o taškus A ir C sujungiame per jungtuką J_1 (pav. 2).
Įjungus jungiklį J, reochordo šliaužiklį paslenkame į tokią padėtį, kad miliampermetro parodymai, įjungiant ir išjungiant jungtuką J_1, nesikeistų.

Taip atsitiks tuomet, kai taškų A ir C potencialai bus lygūs $\varphi_A = \varphi_C$.
Kad sumažinti srovės stiprį per miliampermetrą, nuosekliai srovės šaltiniui reikia prijungti žinomos varžos rezistorių (R=300Ω). Atlikus analogiškus skaičiavimus, kaip ir pirmojoje dalyje, randame miliampermetro vidaus varžą R_{mA}:

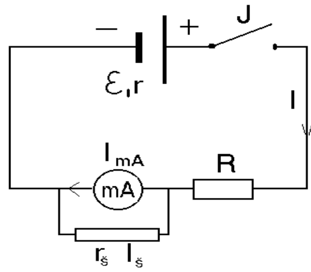


pav. 2

$$R_{mA} = \frac{R_{DC}}{R_{BC}} R_{et}. \; (\text{ arba } R_{mA} = \frac{l_{DC}}{l_{BC}} R_{et} \quad) \; (7)$$

3. Srovės šaltinio elektrovaros ir jo vidinės varžos radimui sujungiame nuoseklią grandinę (pav.3). Ankstesniu matavimu įvertinę duotojo laido varžą (R_x), juo pasinaudojame parinkdami miliampermetrui šuntą. Žinant miliampermetro vidaus varžą ir jo rodmenis, randame įtampos kritimą U_{mA};

$$U_{mA}=I_{mA}R_{mA}\,.$$



pav. 3

Tuomet rasime $I_{rš}=\dfrac{U_{mA}}{r_š}$ (arba $\dfrac{I_{rš}}{I_{mA}}=\dfrac{R_{mA}}{r_š}$) ir visą srovę grandinėje $I = I_{mA} + I_{rš}$

Apskaičiavę bendrą išorinės grandinės dalies varžą R_b , rašome Omo dėsnį uždarajai grandinei: $\varepsilon = I_1R_b + I_1r$ (8)

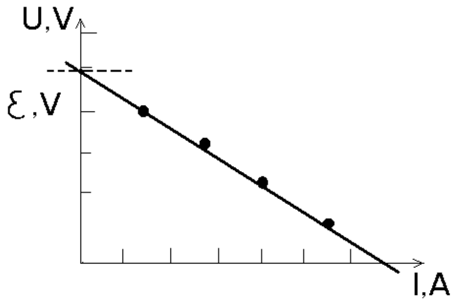
Pakeitę išorinės grandinės dalies varžą $R_b^{'}$ arba miliampermetro šunto varžą $r_š^{'}$, rasime kitą srovės stiprį I_2 . Tuomet rašome dar vieną Omo dėsnį uždarajai grandinei:

$$\varepsilon = I_2R_b^{'} + I_2r \qquad (9)$$

Išsprendę (8) ir (9) lygčių sistemą, rasime tiriamojo šaltinio elektrovarą ε ir jo vidaus varžą r

$$\varepsilon = I_1R_b + I_1\frac{U_1-U_2}{I_2-I_1};\quad r=\frac{U_1-U_2}{I_2-I_1}; \qquad (10)$$

4. Srovės šaltinio elektrovarą $\boldsymbol{\varepsilon}$ ir jo vidaus varžą ***r*** galima rasti taikant grafinį metodą. Keičiant srovės stiprį grandinėje (pav.3), randame įtampos kritimą išorinės grandinės dalyje $U = IR_b$. Koordinačių ašyse atidėję U ir I vertes ir turėdami uomenyje Omo dėsnį uždarajai grandinei ($U=\varepsilon - Ir$), rasime ieškomąją šaltinio elektrovarą ir jo vidaus varžą.



Gautas tiriamojo šaltinio elektrovaros ir jo vidaus varžos vertes palyginame su eksperimentiniu-analitiniu būdu gautomis vertėmis.