

11-ASIS FIZIKOS TURNYRAS
15-oji užduotis Nr. FT11-15 / 2018 05 14 – 06 10

Sąlyga / FT11-15 ▼

Arbatinukas

Į metalinį elektrinį arbatinuką, kurio talpa 1 l, galia $W = 1$ kW, šiluminė talpa $Q = 160$ J/K, įpilama vandens, kurio tūris $V = 0,8$ l. Pradinė arbatinuko, vandens ir oro temperatūra $t_0 = 18$ °C. Oro slėgis kambaryje $p = 105$ Pa. Arbatinuką įjungus jis užvirė praėjus laikui $\tau_1 = 6$ min. Praėjus laikui $\tau_2 = 5$ min po užvirimo, arbatinukas buvo išjungtas. 1) Kiek vandens buvo likę arbatinuke jį išjungus? 2) Kokia buvo vandens temperatūra arbatinuke praėjus laikui $\tau_3 = 10$ min po išjungimo? Laikome, kad vandens savitoji šiluma $q = 4,19$ kJ/kg nepriklauso nuo temperatūros. Arbatinuko dangtelis gan sandarus ir trukdo laisvai maišytis arbatinuke esančioms dujoms su aplinka, bet netrukdo išsilyginti jų slėgiui.

Užduotį parengė mokyklos „Fizikos olimpas“ steigėjų tarybos narys, ilgametis mokyklos direktorius (11 m.) ir šio Fizikos turnyro užduočių parengimo spęsti ir jų sprendimų vertinimo komisijos pirmininkas prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2018 05 14.

Užduoties aiškinamasis sprendimas / FT11-15 ▼

Kadangi metalinis arbatinukas gerai praleidžia šilumą, laikome, kad arbatinuko ir jame esančio vandens bei po dangteliu esančių dujų temperatūra yra vienoda. Jei arbatinuke po dangteliu esančios dujos yra oras, o jų tūris $V' = 0,2$ l, jų šiluminė talpa $Q' = 0,26$ J/K. Vandens garams gauname $Q'' = 0,3$ J/K. Kadangi po dangteliu susidaro oro ir sočiųjų garų mišinys, turėsime tarpinę šiluminės talpos vertę. Taigi, į dujų šiluminę talpą galime neatsižvelgti net jeigu talpa „1 l“ nurodyta su atsarga ir nereiškia sklidino arbatinuko. Vandeniui ir arbatinukui pašildyti nuo $t_0 = 18$ °C iki virimo temperatūros $t_1 = 100$ °C reikalinga energija

$$E = (Q + q\rho V)(t_1 - t_0),$$

čia $\rho = 998$ kg/m³ yra vandens tankis esant $t_0 = 18$ °C.

$$E = (160 + 4190 \cdot 998 \cdot 0,0008)(100 - 18) = 287000 \text{ (J)}.$$

Arbatinukui šylant sočiųjų garų masė dangtelio apribotoje erdmėje didėja, esant 100 °C temperatūrai ji yra 0,12 g. tokiam vandens kiekiui išgarinti reikia apie 280 J energijos. Taigi, į vandens garavimą neverdant galima neatsižvelgti.

Per laiką $\tau_1 = 6$ min = 360 s arbatinukas sunaudos elektros energijos

$$E' = W\tau_1, \quad E = 1000 \cdot 360 = 360000 \text{ (J)}.$$

Matome, kad $E' > E$, t.y., dalis šilumos perduodama aplinkai. Perduodama aplinkai galia yra proporcinga arbatinuko ir aplinkos temperatūrų skirtumui. Rašome diferencialinę šilumos balanso lygtį:

$$Wd\tau = (Q + q\rho V)dt + k[t(\tau) - t_0]d\tau.$$

Čia k – parametras, priklausantis nuo arbatinuko ir aplinkos šiluminio kontakto, $t(\tau)$ – kintanti arbatinuko temperatūra. Lygtyje atskiriame kintamuosius ir integruojame:

$$d\tau = \frac{(Q + q\rho V)dt}{W - k[t(\tau) - t_0]}$$

$$\tau = \int \frac{(Q + q\rho V)dt}{W - k[t(\tau) - t_0]} = -\frac{(Q + q\rho V)}{k} \ln\{W - k[t(\tau) - t_0]\} + C,$$

$$e^{-\frac{k\tau}{Q+q\rho V}} = \frac{W - k[t(\tau) - t_0]}{C'}$$

Integravimo konstantai C' ir parametru k nustatyti panaudojame sąlygas:

$$t(0) = t_0, \quad t(\tau_1) = t_1.$$

Iš pirmosios sąlygos gauname

$$C' = W.$$

Antroji sąlyga duoda lygtį

$$1 - k \frac{t_1 - t_0}{W} - e^{-\frac{k\tau_1}{Q+q\rho V}} = 0.$$

Lygtis transcendentinė, jos analizinis sprendinys nežinomas. Sprendžiame lygtį skaitmeniškai.

$$1 - k \frac{100 - 18}{1000} - e^{-\frac{k \cdot 360}{160 + 4190 \cdot 998 \cdot 0,0008}} = 0.$$

$$1 - 0,082k - e^{-0,103k} = 0.$$

Lygtį sprendžiame stygų metodu. Funkcijai $f(k) = 1 - 0,082k - e^{-0,103k}$ parenkame pradines vertes iš intervalo $0 < k < 10$. Sudarome lentelę

k	3	7	4,0	4,4	4,6	4,608	4,609
f	0,02	-0,06	0,01	0,003	-0,0005	$2 \cdot 10^{-5}$	$9 \cdot 10^{-8}$

Taigi, $k = 4,61$ W/K.

Arbatinukui užvirus elektros energija naudojama verdančiam vandeniui garinti ir perduodamai į aplinką šilumai kompensuoti. Gauname:

$$W\tau_2 = \sigma m' + k(t_1 - t_0)\tau_2.$$

Čia $\sigma = 2,26$ MJ/kg yra vandens garavimo šiluma virimo temperatūroje, m' išgaravusio vandens masė.

$$m' = \frac{[W - k(t_1 - t_0)]\tau_2}{\sigma}.$$

Ieškomoji vandens masė arbatinuką išjungus

$$m'' = \rho V - m' = \rho V - \frac{[W - k(t_1 - t_0)]\tau_2}{\sigma},$$

$$m'' = 998 \cdot 0,0008 - \frac{[1000 - 4,61(100 - 18)]300}{2,26 \cdot 10^6} = 0,716 \text{ (kg)}.$$

Vandens tūrį gauname atsižvelgę į tai, kad esant $t_1 = 100 \text{ }^\circ\text{C}$ vandens tankis $\rho_1 = 958 \text{ kg/m}^3$:

$$V_1 = m''/\rho_1, \quad V_1 = 0,716/958 = 0,000745 \text{ m}^3 = 0,745 \text{ (l)}.$$

Išjungto arbatinuko temperatūros kitimą aprašo lygtis

$$(Q + qm'')dt + k[t(\tau) - t_0]d\tau = 0.$$

$$-\frac{k}{Q + qm''}d\tau = \frac{dt}{[t(\tau) - t_0]},$$

$$-\frac{k}{Q + qm''}\tau = \int \frac{dt}{t(\tau) - t_0} = \ln[t(\tau) - t_0] + C,$$

$$C'e^{-\frac{k\tau}{Q+qm''}} = t(\tau) - t_0.$$

Laiką skaičiuojant nuo arbatinuko išjungimo momento $t(0) = 100 \text{ }^\circ\text{C}$, todėl integravimo konstanta

$$C' = t_1 - t_0, \quad C' = 100 \text{ }^\circ\text{C} - 18 \text{ }^\circ\text{C} = 82 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Tada

$$t(\tau) = (t_1 - t_0)e^{-\frac{k\tau}{Q+qm''}} + t_0.$$

$$t(\tau) = 82e^{-\frac{4,61\tau}{160+4190 \cdot 0,745}} + 18,$$

$$t(\tau) = 82e^{-0,0014\tau} + 18.$$

Irašę $\tau = 10 \text{ min} = 600 \text{ s}$ gauname

$$t(600) = 82e^{-0,0014 \cdot 600} + 18 = 53 \text{ (}^\circ\text{C)}.$$

Užduoties aiškinamąjį sprendimą pateikė jos autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2020 07 28.

Turnyro dalyvių sprendimų aptarimas / FT11-15 ▼

Tik vienas iš sprendusiųjų įvertino esančių arbatinuke dujų poveikį bei garavimo poveikį neverdant, kai kas paminėjo nereikšmingumą.

Užduoties sprendimų aptarimą parengė jos autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2020 07 28.

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelė / FT11-15 ▼

Nr.	Sprendimų vertinimo kriterijus	Vertė balais
1.	Įvertinta arbatinuke esančių dujų šiluminė talpa	2
	Įvertintas garavimo poveikis arbatinukui neverdant	2
	Nustatytas šilumos atidavimo aplinkai dėsningumas	2
	Nustatytas arbatinuke likusio vandens kiekis	2
2.	Nustatyta temperatūra	2
3.	Netikslumai (p. 1-2)	Iki (-2)
	Didžiausias galimas sprendimų įvertinimas	10

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelę parengė užduoties autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2020 07 28.