

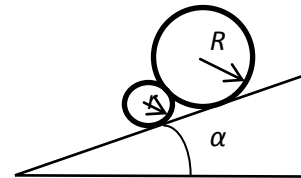
11-ASIS FIZIKOS TURNYRAS
9-oji užduotis Nr. FT11-9 / 2018 01 02 – 01 30

Sąlyga / FT11-9 ▼

Rieda du ritiniai

Ant nuožulniosios plokštumos, sudarančios kampą $\alpha = 20^\circ$ su horizontu, padedami du vienodo ilgumo ritiniai, pagaminti iš tos pačios medžiagos, kaip pateikta pav. $R = 5$ cm, trinties koeficientas visiems paviršiams $\mu = 0,4$.

- 1) Kokio didumo spinduliui r esant ritiniai nejudės?
- 2) Kokiu pagreičiu judės ritinių ašys kai $r = 4,5$ cm?
- 3) Kokie bus ritinių kampiniai pagreičiai?



Užduotį parengė mokyklos „Fizikos olimpas“ steigėjų tarybos narys, ilgametis mokyklos direktorius (11 m.) ir šio Fizikos turnyro užduočių parengimo spęsti ir jų sprendimų vertinimo komisijos pirmininkas prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2018 01 02.

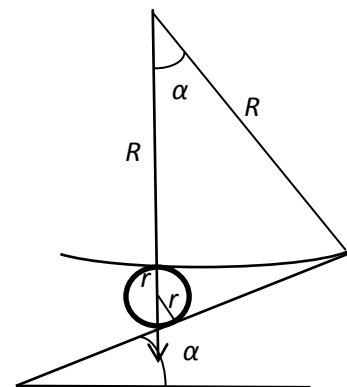
Užduoties aiškinamasis sprendimas / FT11-9 ▼

Ritiniai slys nuožulniaja plokštuma, jei $\mu < \tan \alpha$. Mūsų sąlygoje $\tan \alpha = \tan 20^\circ = 0,36 < \mu$, taigi, ritiniai gali tik riedėti. Jei ritinių lietimosi linija bus žemiau negu didesniojo ritinio ir nuožulniosios plokštumos lietimosi linija, didesnysis ritinys persiris per mažesnįjį, ir abu ritiniai nuriedės nuožulniaja plokštuma. Ribinė padėtis pateikta pav.: vertikale eina per abiejų ritinių ašis. Gauname:

$$\cos \alpha = \frac{R}{R + r + r / \cos \alpha},$$

$$r = R \frac{\cos \alpha (1 - \cos \alpha)}{1 + \cos \alpha},$$

$$r = 5 \cdot \frac{\cos 20^\circ (1 - \cos 20^\circ)}{1 + \cos 20^\circ} = 0,15 \text{ (cm)}.$$



Kai r bus didesnis, mažesniam ritiniui riedėti trukdys trintis su didesniuoju ritiniu. Ritinių ilgus pažymime l , jų medžiagos tankį pažymime ρ , laisvojo kritimo pagreitį g . Mažesnįjį ritinį jo sąlyčio su nuožulniaja plokštuma linijos atžvilgiu veikia jo sunkio jėgos $mg = \pi r^2 l \rho g$ sukurtas jėgos momentas, didesniojo ritinio prispaudimo jėgos F sukurtas jėgos momentas ir ritinių trinties jėgos $F_{tr} = \mu F$ sukurtas jėgos momentas. Didesnįjį ritinį jo sąlyčio su nuožulniaja plokštuma linijos atžvilgiu veikia jo sunkio jėgos $Mg = \pi R^2 l \rho g$ sukurtas jėgos momentas, mažesniojo ritinio prispaudimo jėgos $-F$ sukurtas jėgos momentas ir ritinių trinties jėgos $F_{tr} = \mu F$ sukurtas jėgos momentas. Ritiniai nejudės, jei kiekvieną jų veikiančių jėgos momentų suma bus 0. Mažesnįjį ritinį veikia sunkio jėgos sukurtas jėgos momentas sąlyčio su nuožulniaja plokštuma linijos atžvilgiu

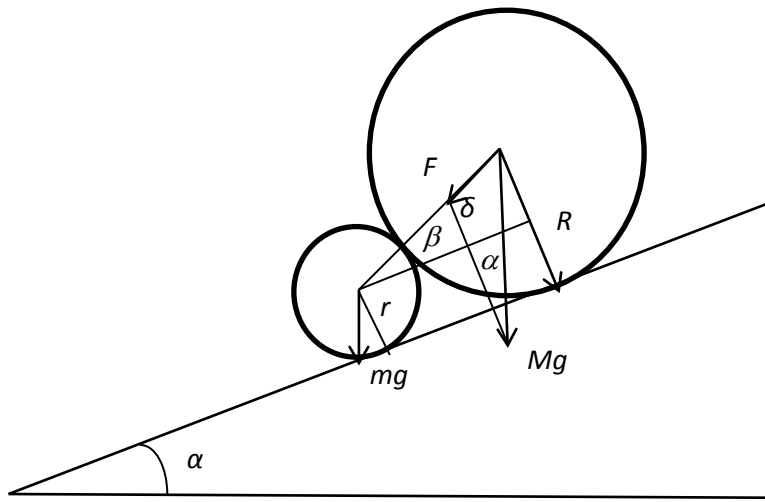
$$N_1 = \pi r^2 l \rho g \cdot r \sin \alpha = \pi r^3 l \rho g \sin \alpha,$$

prispaudimo jėgos sukurtas momentas

$$N_2 = F \cdot r \cos \beta,$$

o ritinių trinties jėgos sukurtas momentas

$$N_3 = \mu F \cdot r (1 + \sin \beta).$$



Didesnįjį ritinį veikia momentai

$$N'_1 = \pi R^2 l \rho g \cdot R \sin \alpha = \pi R^3 l \rho g \sin \alpha,$$

$$N'_2 = F \cdot R \cos \beta,$$

$$N'_3 = \mu F \cdot R(1 - \sin \beta).$$

Gauname lygčių sistemą

$$\begin{cases} N_1 + N_2 - N_3 = 0 \\ N'_1 - N'_2 - N'_3 = 0 \\ \pi r^3 l \rho g \sin \alpha + Fr \cos \beta - \mu F \cdot r(1 + \sin \beta) = 0 \\ \pi R^3 l \rho g \sin \alpha - FR \cos \beta - \mu F \cdot R(1 - \sin \beta) = 0 \end{cases}$$

Iš antros lygties gauname

$$F = \frac{\pi R^2 l \rho g \sin \alpha}{\cos \beta + \mu(1 - \sin \beta)}.$$

Irašę F į pirmąją gauname

$$\begin{aligned} & r^2 + R^2 \frac{\cos \beta - \mu(1 + \sin \beta)}{\cos \beta + \mu(1 - \sin \beta)}, \\ \sin \beta &= \frac{R-r}{R+r}, \quad \cos \beta = \frac{2\sqrt{rR}}{R+r}. \\ & \mu \frac{r^3}{R^3} + \frac{r^2 \sqrt{r}}{R^2 \sqrt{R}} + \mu \sqrt{\frac{r}{R}} - \mu = 0. \end{aligned}$$

Gavome lygtį, kurios tikslus sprendinys nežinomas. Sprendžiame apytiksliai skaitmeniškai.

Pažymime $\sqrt{\frac{r}{R}} = x$. Tada

$$0,4x^6 + x^5 + x - 0,4 = 0.$$

Taikome stygų metodą funkcijai $f(x) = 0,4x^6 + x^5 + x - 0,4$. Kadangi $x < 1$, skaičiai x^5 ir x^6 yra maži, imame pradines x vertes 0,39 ir 0,38.

x	0,39	0,38
f	0,0004	-0,012

Matome, kad sprendinys yra tarp paimtų verčių, ir artimesnis 0,39. Tada

$$r = Rx^2, \quad r = 5 \cdot x0,39^2 = 0,76 \text{ (cm)}.$$

Taigi, ritiniai nejudės, kai $0,15 \text{ cm} < r < 0,76 \text{ cm}$.

Kadangi $r > 0,76 \text{ cm}$, mažesnis ritinys nejudės tik veikiamas papildomo jėgos momento

N . Gauname:

$$\begin{cases} \pi r^3 l \rho g \sin \alpha + Fr \cos \beta - \mu F \cdot r(1 + \sin \beta) - N = 0 \\ \pi R^3 l \rho g \sin \alpha - FR \cos \beta - \mu F \cdot R(1 - \sin \beta) = 0 \end{cases}$$

$$N = \pi r l \rho g \sin \alpha \left[r^2 + R^2 \frac{\cos \beta - \mu(1 + \sin \beta)}{\cos \beta + \mu(1 - \sin \beta)} \right] = \pi r l \rho g \sin \alpha \left[r^2 + R^2 \frac{\sqrt{rR} - \mu R}{\sqrt{rR} + \mu R} \right].$$

Toks momentas turėtų veikti mažesnįjį ritinį ritinius paleidus judėti ir suteikti jam kampinį pagreitį. Matome, kad momentas N didesnis už sunkio jėgos sukuriamą momentą. Tačiau didesnis ritinis rieda tik sunkio jėgos veikiamas. Taigi, ritinius paleidus kontaktas tarp jų išnyksta, ir ritiniai rieda jų ašims judant vienodu linijiniu pagreičiu

$$a = r\varepsilon = r \frac{rmg \sin \alpha}{\frac{3}{2}mr^2} = \frac{2}{3}g \sin \alpha, \quad a = \frac{2}{3} \cdot 9,8 \cdot \sin 20^\circ = 2,2 \text{ (m/s}^2\text{)}.$$

jo kampinis pagreitis

$$\varepsilon = \frac{N}{I}$$

Mažesniojo ritinio kampinis pagreitis

$$\varepsilon = \frac{a}{r}. \quad \varepsilon = \frac{2,2}{0,045} = 48 \text{ (s}^{-2}\text{)}.$$

Didesniojo ritinio kampinis pagreitis

$$\varepsilon' = \frac{a}{R}. \quad \varepsilon' = \frac{2,2}{0,05} = 44 \text{ (s}^{-2}\text{)}.$$

Užduoties aiškinamąjį sprendimą pateikė jos autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2020 07 28.

Turnyro dalyvių sprendimų aptarimas / FT11-9 ▼

Niekas nepastebėjo, kad per mažo spindulio ritinį didesnis gali persiristi. Taip pat niekas neįvertino, kad esant dideliame spinduliui ritiniai rieda vienodu linijiniu pagreičiu nesiliesdami.

Užduoties sprendimų aptarimą parengė jos autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2020 07 28.

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelė / FT11-9 ▼

Nr.	Sprendimų vertinimo kriterijus	Vertė balais
1.	Nustatytas mažiausias ritinio spindulys	2
	Nustatytas didžiausias ritinio spindulys	2
2.	Nustatytas masės centro pagreitis	2
3.	Nustatytas mažesniojo ritinio kampinis pagreitis	2
	Nustatytas didesniojo ritinio kampinis pagreitis	2
4.	Netikslumai (p. 1-3)	Iki (-2)
	Didžiausias galimas sprendimų įvertinimas	10

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelę parengė užduoties autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2020 07 28.