

15-ASIS FIZIKOS TURNYRAS
5-oji užduotis Nr. FT15-5 / 2021 10 27 – 2021 10 24

Strypo svyravimai

Sąlyga / FT15-5 ▼

Ant lengvos spyruoklės pakabintą 21,7 cm ilgio 6 mm skersmens aliumininį strypą iki pusės panardinus įvandenį, spyruoklė sutrumpėjo 1 cm. Koks yra spyruoklės standumas ir kiek ji buvo deformuota iki strypo panardinimo?

Strypą dar daugiau panardinus, jį šiek tiek paspaudžiant žemyn, ir po to staiga paleidus, prasideda svyravimai stačia kryptimi. Neatsižvelgdami į vandens pasipriešinimą strypo judėjimui, raskite:

- 1) didžiausią strypo pagreitį, kai svyravimų amplitudė lygi 2 mm;
- 2) svyravimų dažnį.

Aliuminio tankis lygus $2,7 \text{ g/cm}^3$, o vandens – 1 g/cm^3 .

Gravitacinio lauko stipris $g = 9,8 \text{ N/kg}$.

Užduotį parengė doc. dr. Stasys Tamošiūnas - Vilniaus universiteto Fizikos fakulteto Fotonikos ir nanotechnologijų instituto inžinierius, mokyklos „Fizikos olimpas“ direktorius, jos steigėjų tarybos narys ir dėstytojas.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2021 10 27.

Aiškinamasis sprendimas / FT15-5 ▼

Duota: $l = 0,217 \text{ m}$; $d = 0,006 \text{ m}$; $l_1 = 0,5l$; $\Delta y = 0,01 \text{ m}$; $y_m = 0,002 \text{ m}$; $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$; $\rho_v = 1000 \text{ kg/m}^3$; $g = 9,8 \text{ N/kg}$.

Rasti: k ; y_0 ; a_m ; f .

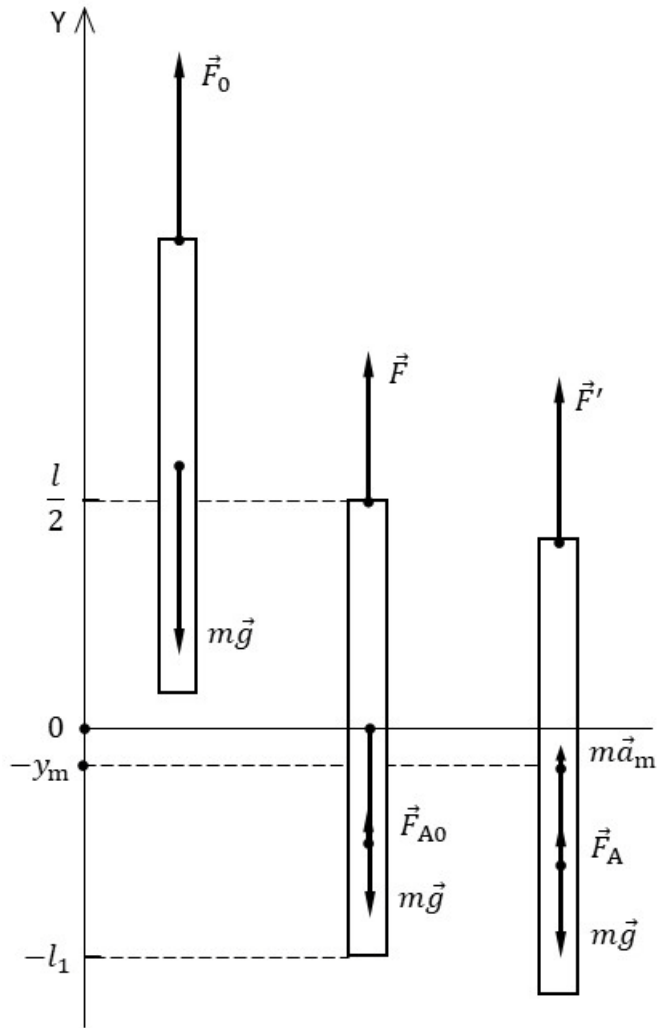
Strypą veikia sunkio jėga $m\vec{g}$ ir spyruoklės tamprumo jėga \vec{F}_0 , o dalinai panardinus – dar ir Archimedo jėga \vec{F}_{A0} bei sumažėjusi spyruoklės tamprumo jėga \vec{F} . Jo pusiausvyros sąlyga pagal pirmąjį Niutono dėsnį:

$$m\vec{g} + \vec{F}_0 = 0; \quad m\vec{g} + \vec{F}_{A0} + \vec{F} = 0.$$

Strypo masė $m = \rho l S$, skersinio pjūvio plotas $S = \frac{\pi d^2}{4}$, spyruoklės tamprumo jėgos modulis pagal Huko dėsnį $F_0 = ky_0$ ir $F = k(y_0 - \Delta y)$, o panardintos strypo dalies išstumto vandens svoriui lygios jėgos modulis $F_{A0} = \rho_v l_1 S g$. Suprojektavus vektorius į pasirinktą koordinačių ašį Y ir visa tai surašius, turime:

$$-\rho l \frac{\pi d^2}{4} g + ky_0 = 0;$$

$$-\rho l \frac{\pi d^2}{4} g + \rho_v l_1 \frac{\pi d^2}{4} g + k(y_0 - \Delta y) = 0.$$



Iš antrosioslygties atėmę pirmąją lygtį randame spyruoklės standumą ir pradinį pailgėjimą:

$$k = \frac{\rho_v \pi l d^2 g}{8 \Delta y}; \quad k = \frac{1000 \cdot 3,14 \cdot 0,217 \cdot 0,006^2 \cdot 9,8}{8 \cdot 0,01} \approx 3 \text{ (N/m)}.$$

$$y_0 = \frac{\rho l \pi d^2 g}{4k} = \frac{2 \rho \Delta y}{\rho_v}; \quad y_0 = \frac{2 \cdot 2700 \cdot 0,01}{1000} \approx 5,4 \text{ (cm)}.$$

Strypą panardinus žemyn nuotoliu y_m (tai būsimųsvyravimų amplitudė), spyruoklės tamprumo jėga padidėja iki $F' = k(y_0 - \Delta y + y_m)$, Archimedo jėga irgi padidėja iki $F_A = \rho_v(l + y_m)Sg$ ir paleistas strypas pajuda pagreičiu a_m aukštyn. Pagal antrąjį Niutono dėsnį:

$$m\vec{g} + \vec{F}_A + \vec{F}' = m\vec{a}_m.$$

Suprojektavę vektorius į ašį Y ir įrašę padidėjusių jėgų išraiškas, turime trečiąją lygtį be vektorių:

$$-\rho l \frac{\pi d^2}{4} g + \rho_v(l_1 + y_m) \frac{\pi d^2}{4} g + k(y_0 - \Delta y + y_m) = \rho l \frac{\pi d^2}{4} a_m.$$

Atėmus iš čia visa tai, kas pagal antrąją lygtį lygu nuliui, turime ketvirtąją lygtį:

$$\left(\rho_v \frac{\pi d^2}{4} g + k \right) y_m = \rho l \frac{\pi d^2}{4} a_m.$$

Įrašę šioje lygtyje anksčiau gautą spyruoklės standumo išraišką, randame didžiausią strypo pagreitį:

$$a_m = \frac{\rho_v}{\rho} \left(\frac{1}{l} + \frac{1}{2\Delta y} \right) g y_m; \quad a_m = \frac{1000}{2700} \left(\frac{1}{0,217} + \frac{1}{2 \cdot 0,01} \right) 9,8 \cdot 0,002 \approx 39,6 \text{ (cm/s}^2\text{)}.$$

Bendroju harmoninių svyravimų atveju pagreičio vektorius yra priešingos krypties, nei svyruojančio kūno poslinkį nuo pusiausvyros padėties nusakanti koordinatė y , kai pusiausvyros padėtyje ji lygi nuliui, todėl pagreičio projekcija poslinkio atžvilgiu a_y yra rašoma su minuso ženklu, o dydžiu ji su koordinate y yra susieta svyravimų ciklinio dažnio $\omega = 2\pi f$ kvadratu:

$$a_y = -4\pi^2 f^2 y.$$

Palyginę mūsų gautą didžiausio strypo pagreičio modulio sąryšį su jo svyravimų amplitude, randame svyravimų dažnį:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\rho_v}{\rho} \left(\frac{1}{l} + \frac{1}{2\Delta y} \right) g}; f = \frac{1}{2 \cdot 3,14} \sqrt{\frac{1000}{2700} \left(\frac{1}{0,217} + \frac{1}{2 \cdot 0,01} \right) 9,8} \approx 2,24 \text{ (Hz)}.$$

Aiškinamąjį sprendimą pateikė užduoties autorius doc. dr. Stasys Tamošiūnas.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2021 11 22.

Turnyro dalyvių sprendimų aptarimas / FT15-5 ▼

Dauguma turnyro dalyvių, nagrinėdami strypą veikiančias jėgas prieš panardinant ir jį dalinai panardinus, rado spyruoklės standumą ir jos pailgėjimą tik pakabinus strypą, tačiau sunkiau sekėsi susieti papildomą mažą panardinimą su pagreičiu ir svyravimų dažniu paleidus svyruoti. Neprisimenant šių fizikinių dydžių sąryšio, yra pravartu užrašyti koordinatės priklausomybę nuo laiko harmoninių svyravimų atveju: $y = y_m \cos 2\pi f t$, rasti tarpusavio palyginimui jos antrąją išvestinę pagal laiką, atitinkančią pagreitį: $a = -4\pi^2 f^2 y_m \cos 2\pi f t$.

Trys turnyro dalyviai į vandenį nardino už vidurio pakabintą strypelį, vienas – iki pusės panardintu strypeliu spaudė spyruoklę prie indo dugno. Buvo skaičiuojančių ne prašomą svyravimų dažnį, o ciklinį dažnį, paliekančių fizikinius dydžius be dimensijų, su netinkamomis dimensijomis (pavyzdžiui, pagreitis - metrais), o ir nerodančių skaičiavimų – atsakymus rašančių iškart po lygybės teorinei formulei. Skaičiavimų nerodymą turėtų padėti pašalinti sprendimų vertinimo kriterijų lentelėje esantis p. 5 (skliaustuose), kurio taikymas fizikos turnyre ateityje numatomas dar griežtesnis – po -0,5 balo kiekvienam ieškomam fizikiniam dydžiui.

Sprendimų aptarimą parengė užduoties autorius doc. dr. Stasys Tamošiūnas.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2021 11 22.

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelė / FT15-5 ▼

Nr.	Sprendimų vertinimo kriterijus	Vertė balais
1.	Spyruoklės standumas	3
2.	Pailgėjimas	2
3.	Didžiausias pagreitis	3
4.	Svyravimų dažnis	2
5.	Pateikta ne pagal reikalavimus (nerodomi skaičiavimai)	-1(-0,5)
6.	Vėlavimas pateikti sprendimą (vienai parai)	-1
7.	Kiti netikslumai (kiekvienam iš kriterijų Nr.1-4)	iki (-1)
Didžiausias galimas sprendimų įvertinimas		10

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelę parengė užduoties autorius doc. dr. Stasys Tamošiūnas.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2021 11 22.