

16-ASIS FIZIKOS TURNYRAS
7-oji užduotis Nr. FT16-7 / 2022 11 07 – 2022 12 04

Sąlyga / FT16-7 ▼

Kiaura statinė

Cilindro formos 60 cm vidinio skersmens statinės dugne yra apvali 1,2 cm skersmens anga, uždaryta kamščiu. Į statinę įpylus 220 kg vandens ir atkimšus angą, ji tuštėja, vandeniui ištekant vis mažėjančiu greičiu. Raskite:

- 1) pradinį vandens sluoksnio storį;
- 2) vandens lygio statinėje mažėjimo pradinį greitį;
- 3) ištekancio pro angą vandens pradinį greitį;
- 4) laiko tarpą, per kurį ištuštėja statinė;
- 5) laiko tarpą, per kurį išbėga pusė likusio vandens.

Į vandens klampą galima neatsižvelgti. Gravitacinio lauko stipris $g = 9,8 \text{ N/kg}$.

Užduotį parengė doc. dr. Stasys Tamošiūnas – Vilniaus universiteto Fizikos fakulteto Fotonikos ir nanotechnologijų instituto senjoras, mokyklos „Fizikos olimpas“ direktorius, steigėjų tarybos narys ir dėstytojas.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2022 11 07.

Aiškinamasis sprendimas / FT16-7 ▼

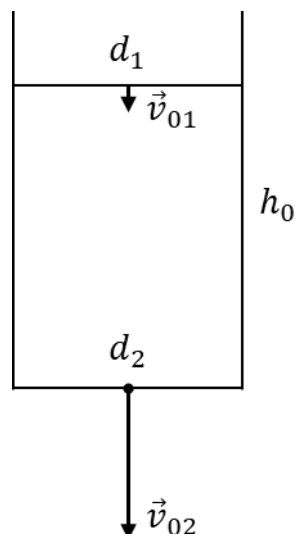
Duota: $d_1 = 0,6 \text{ m}$; $d_2 = 0,012 \text{ m}$; $m = 226 \text{ kg}$; $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$; $g = 9,8 \text{ N/kg}$.

Rasti: h_0 ; v_{01} ; v_{02} ; τ ; τ_2 .

Randame pradinį vandens sluoksnio storį, jo tūrį V padaliję iš statinės skerspjūvio ploto S_1 :

$$V = \frac{m}{\rho}; \quad S_1 = \pi \frac{d_1^2}{4}; \quad h_0 = \frac{V}{S_1} = \frac{4m}{\pi \rho d_1^2};$$

$$h_0 = \frac{4 \cdot 220}{3,14 \cdot 1000 \cdot 0,6^2} \approx 77,8 \text{ (cm)}.$$



Vandens pradinis greičius randame iš jo srauto nenutrūkstamumo ir Bernulio lygčių:

$$S_1 v_{01} = S_2 v_{02}; S_2 = \pi \frac{d_2^2}{4}; v_{01} d_1^2 = v_{02} d_2^2;$$

$$\frac{\rho v_{01}^2}{2} + \rho g h_0 = \frac{\rho v_{02}^2}{2}; v_{01}^2 + 2g h_0 = v_{02}^2 \frac{d_1^4}{d_2^4};$$

$$v_{01} = \sqrt{\frac{2g h_0}{\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 - 1}}; v_{01} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,8 \cdot 0,778}{\left(\frac{0,6}{0,012}\right)^4 - 1}} \approx 1,56 \text{ (mm/s)}.$$

$$v_{02} = \sqrt{\frac{2g h_0}{1 - \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4}}; v_{02} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,8 \cdot 0,778}{1 - \left(\frac{0,012}{0,6}\right)^4}} \approx 3,91 \text{ (m/s)}.$$

Pastebime, kad ištekancio pro siaurą angą ($d_2 \ll d_1$) vandens greitis yra žymiai didesnis už vandens sluoksnio storio statinėje mažėjimo greitį, o tie greičiai laikui bėgant mažėja plonėjant vandens sluoksniui ($h < h_0$). Nesunku įsitikinti, kad nežymiai suklystume, pirmoje greičio formulėje pošaknio vardiklyje atmetę vieneta, o antroje – skersmenų santykį:

$$v_{01} \approx \frac{d_2^2}{d_1^2} \sqrt{2g h_0}; v_{02} \approx \sqrt{2g h_0}.$$

Vandens, kurio sluoksnio inde storis yra h , tūrio pokytis per mažą laiko tarpą dt :

$$dV = -S_2 v_2 dt = -\pi \frac{d_2^2}{4} \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4}} dt.$$

Vandens sluoksnio storio pokytis:

$$dh = \frac{dV}{S_1} = -\sqrt{\frac{2gh}{\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 - 1}} dt.$$

Laiko tarpą, per kurį ištuštėja statinė, randame integruodami^{X)}:

$$\tau_1 = \int_0^{\tau_1} dt = -\sqrt{\frac{\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 - 1}{2g}} \int_{h_0}^0 \frac{dh}{\sqrt{h}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 - 1}{2g}} (2\sqrt{h_0}) \approx \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 \sqrt{\frac{2h_0}{g}};$$

$$\tau_1 = \left(\frac{0,6}{0,012}\right)^2 \sqrt{\frac{2 \cdot 0,778}{9,8}} \approx 996 \text{ (s)}.$$

Pusė likusio vandens atitinka du kartus mažesnę pradinį jo sluoksnio aukštį $h'_0 = 0,5h_0$, tai laiko tarpas, per kurį išbėga pusė likusio vandens, yra $\sqrt{2}$ kartų mažesnis už laiko tarpą, per kurį ištuštėja statinė (išbėga visas joje buvęs vanduo):

$$\tau_2 = \frac{\tau_1}{\sqrt{2}}; \tau_2 = \frac{996}{\sqrt{2}} \approx 704 \text{ (s)}.$$

Pastaba: ^{X)}galimas sprendimas neintegruojant, kai nagrinėjamas vandens lygio mažėjimas vidutiniu greičiu, lygiu pradinio greičio v_{01} ir galutinio nulinio greičio aritmetiniam vidurkiui $v_{1v} = 0,5v_{01}$:

$$\tau_1 = \frac{h_0}{v_{1v}} = \frac{2h_0}{v_{01}} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$$

Aiškinamąjį sprendimą pateikė užduoties autorius doc. dr. Stasys Tamošiūnas.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2022 12 13.

Turnyro dalyvių sprendimų aptarimas / FT16-7 ▼

Visi turnyro dalyviai teisingai apskaičiavo vandens sluoksnio storį. Keturių turnyro dalyvių sprendimai pateikti ir kitur be priekaištų, tą patį galėtume teigti apie dar dešimties kitų dalyvių sprendimus, jei jie būtų radę pusės būtent likusio vandens, kai jau būna išbėgusi pirmoji pusė, išbėgimo trukmę, pateikę ieškomų fizikinių dydžių skaičiavimus, o ir nepavėlavę atsiusti sprendimus.

Sprendimų aptarimą parengė užduoties autorius doc. dr. Stasys Tamošiūnas.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2022 12 13.

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelė / FT16-7 ▼

Nr.	Sprendimų vertinimo kriterijus	Vertė balais
1.	Vandens sluoksnio storis	1
2.	Pradinis vandens lygio mažėjimo greitis	2
3.	Pradinis vandens ištekėjimo greitis	2
4.	Statinės ištuštėjimo trukmė	3
5.	Pusės likusio vandens ištekėjimo trukmė	2
6.	Nerodomi skaičiavimai (kiekvienam iš kriterijų Nr.1-5)	-0,5
7.	Vėlavimas pateikti sprendimą (vienai parai)	-1
8.	Kiti netikslumai (kiekvienam iš kriterijų Nr.1-5)	iki (-1)
Didžiausias galimas sprendimų įvertinimas		10

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelę parengė užduoties autorius doc. dr. Stasys Tamošiūnas.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2022 12 13.