

**17-ASIS FIZIKOS TURNYRAS**  
**5-oji užduotis Nr. FT17-5 / 2023 10 16 – 2023 11 13**

**Sulenktas strypas**

**Sąlyga / FT17-5 ▼**

Tiesų metalinį strypą AB, kurio ilgis  $l = 22$  cm, tam tikroje vietoje C sulenkus kampu  $\alpha = 60^\circ$  ir lankstu (judamąja strypo ir pakabos jungtimi, leidžiančia strypui laisvai sukis pakabos atžvilgiu) pakabinus gale A, paaiškėjo, kad jo dalis CB kabo gulsčia. Raskite:

- a) strypo dalių CB ir AC ilgių skirtumą;
- b) masės centro nuotolį nuo galo A;
- c) strypo posūkio kampą, jo gale B pakabinus tos pačios, kaip ir strypo, masės pasvarą;
- d) strypo masės centro poslinkį, pakabinus pasvarą;
- e) kitos pasvaro pakabinimo vietos D nuotolį nuo galo B, kai pasvaras nepasuka strypo.

*Užduotį parengė doc. dr. Stasys Tamošiūnas – Vilniaus universiteto Fizikos fakulteto Fotonikos ir nanotechnologijų instituto senjoras, mokyklos „Fizikos olimpas“ direktorius, steigėju tarybos narys ir dėstytojas.*

▲ Šis tekstas svetainėje [www.olimpas.lt](http://www.olimpas.lt) nuolat skelbiamas nuo 2023 10 16.

**Aiškinamasis sprendimas / FT17-5 ▼**

Duota:  $l = 22$  cm;  $\alpha = 60^\circ$ ;  $m_p = m$ .

Rasti:  $\Delta l$ ;  $h$ ;  $\varphi$ ;  $s$ ;  $\beta$ ;  $l'$ .

Tegu strypo medžiagos ilginis tankis (masė ilgio vienetu)  $\tau = m/l$ , tai jo dalių AC ir CB masės yra tiesiai proporcingos jų ilgiams  $l_1$  ir  $l_2$ :

$$m_1 = \tau l_1 = \frac{m}{l} l_1; \quad m_2 = \tau l_2 = \frac{m}{l} (l - l_1).$$

Pakabintą sulenktą strypą veikia sunkio jėgos  $m_1 \vec{g}$ ,  $m_2 \vec{g}$  (čia  $\vec{g}$  – gravitacinio lauko stiprio vektorius) ir pakabos reakcijos jėga  $\vec{N}$ . Jo pusiausvyros sąlyga pagal jėgų momentų taisyklę:

$$m_1 g d_1 - m_2 g d_2 = 0.$$

Sunkio jėgų, veikiančių strypo dalių viduryje, pečiai yra  $d_1 = x_1 = 0,5 l_1 \cos \alpha$  ir  $d_2 = -x_2 = 0,5 l_2 - l_1 \cos \alpha = 0,5 [l - l_1 (1 + 2 \cos \alpha)]$ , tada, viską surašius į pusiausvyros sąlygą, randame strypo dalies AC ilgį ir jo dalių ilgių skirtumą:

$$l_1^2 \cos \alpha - (l - l_1) [l - l_1 (1 + 2 \cos \alpha)] = 0;$$

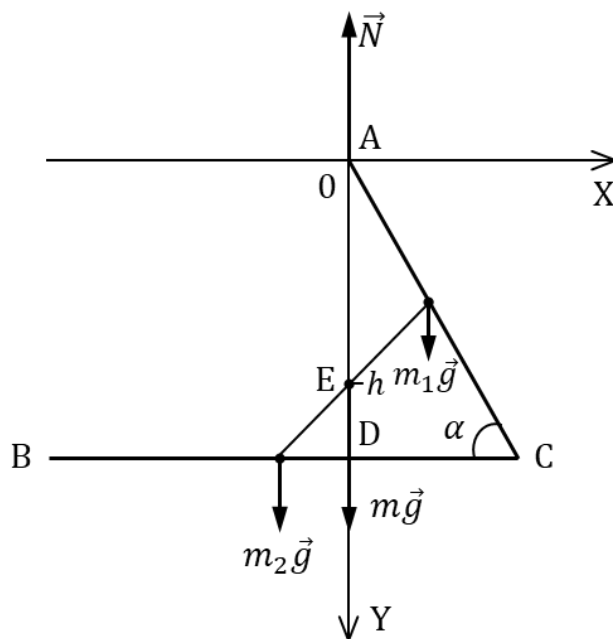
$$(1 + \cos \alpha) l_1^2 - 2l(1 + \cos \alpha) l_1 + l^2 = 0;$$

$$l_1 = \frac{2l(1 + \cos \alpha) - \sqrt{4l^2(1 + \cos \alpha)^2 - 4(1 + \cos \alpha)l^2}}{2(1 + \cos \alpha)} = \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{1 + \cos \alpha}} \right) l;$$

$$l_1 = \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{1 + \cos \alpha}} \right) 22 \approx 9,3 \text{ (cm)};$$

$$\Delta l = l_2 - l_1 = l - 2l_1 = \left( 2\sqrt{1 - \frac{1}{1 + \cos\alpha}} - 1 \right) l;$$

$$\Delta l = \left( 2\sqrt{1 - \frac{1}{1 + \cos 30^\circ}} - 1 \right) 22 \approx 3,4 \text{ (cm)}.$$

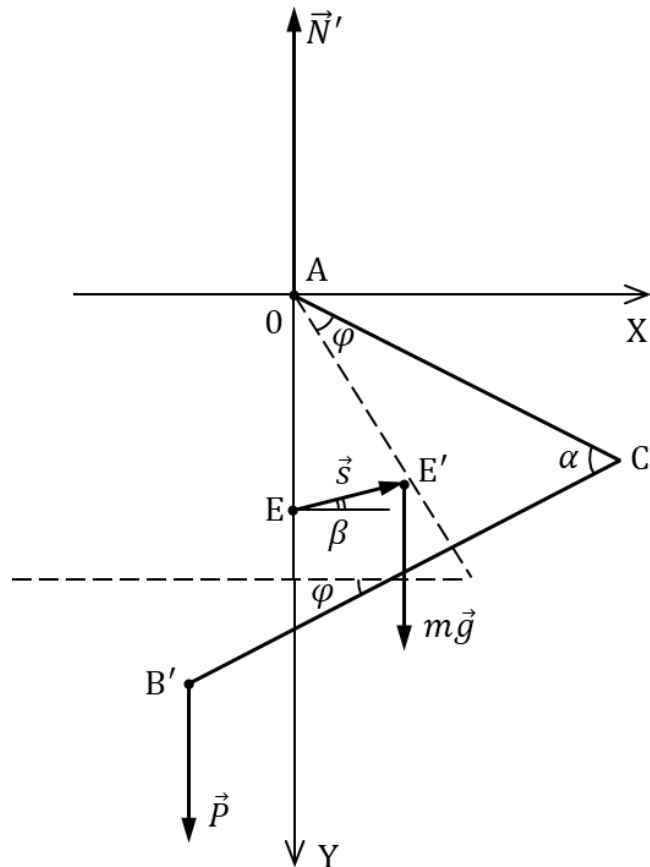


Taigi, strypo dalis CB yra apie 3,4 cm ilgesnė nei AC, kurios ilgis yra apie 9,3 cm. Tuo tarpiniu rezultatu pasinaudosime tolesniuose skaičiavimuose tam, kad išvengtume sudėtingesnių formulių rašymo.

Pakabos reakcijos jėgos  $\vec{N}$  ir pusiausviro strypo sunkio  $m\vec{g} = (m_1 + m_2)\vec{g}$  veikimo taškai A ir masės centras E yra toje pačioje vertikaloje ašyje Y, tai masės centro koordinatės pasirinktoje atskaitos sistemoje  $x_E = 0$ ,  $y_E = h$ :

$$y_E = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}; \quad y_1 = 0,5l_1 \sin\alpha; \quad y_2 = l_1 \sin\alpha;$$

$$h = l_1 \left( 1 - \frac{l_1}{2l} \right) \sin\alpha; \quad h = 9,3 \left( 1 - \frac{9,3}{2 \cdot 22} \right) \sin 60^\circ \approx 6,4 \text{ (cm)}.$$



Pakabinus pasvarą, pasisukusį kampu  $\varphi$  strypą, jį papildomai veikia pasvaro svorio jėga  $\vec{P}$  (jos modulis lygus  $m_p g$ ), tiek pat padidėja ir pakabos reakcijos jėgos  $\vec{N}'$  dydis, o strypo pusiausvyros sąlyga pagal jėgų momentų taisyklę, kai duotų lygių jėgų pečiai yra vienodi:

$$mgd'_1 - m_p g d'_2 = 0; \quad d'_1 = d'_2;$$

$$h \sin \varphi = (l - l_1) \cos \varphi - l_1 \cos(\alpha - \varphi);$$

$$h \sin \varphi - (l - l_1) \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} + l_1 \cos \alpha \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} + l_1 \sin \alpha \sin \varphi = 0;$$

$$[l - l_1(1 + \cos \alpha)]^2 (1 - \sin^2 \varphi) = (l_1 \sin \alpha + h)^2 \sin^2 \varphi;$$

$$\varphi = \arcsin \frac{l - l_1(1 + \cos \alpha)}{\sqrt{[l - l_1(1 + \cos \alpha)]^2 + (l_1 \sin \alpha + h)^2}};$$

$$\varphi = \arcsin \frac{22 - 9,3(1 + \cos 60^\circ)}{\sqrt{[22 - 9,3(1 + \cos 60^\circ)]^2 + (9,3 \sin 60^\circ)^2}} \approx 29^\circ.$$

Strypo masės centro poslinkis  $\vec{s}$  – vektorius, nukreiptas iš pradinio taško E į tašką E' strypui pasisukus kampu  $\varphi$ :

$$s_x = h \sin \varphi; \quad s_y = h(1 - \cos \varphi);$$

$$s = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} = h \sqrt{\sin^2 \varphi + (1 - \cos \varphi)^2};$$

$$s = 6,4 \sqrt{\sin^2 29^\circ + (1 - \cos 29^\circ)^2} \approx 3,2 \text{ (cm)}.$$

$$\beta = \operatorname{arctg} \frac{s_y}{s_x} = \operatorname{arctg} \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi}; \quad \beta = \operatorname{arctg} \frac{1 - \cos 29^\circ}{\sin 29^\circ} \approx 15^\circ.$$

Pasvaro svoris  $\vec{P}$  nepasižymi sukamuoju veikimu, kai jį pakabiname toje pačioje vertikalėje po strypo galu A ir jo masės centru E, tad vietoje D, nutolusioje nuo galo B atstumu  $l'$ :

$$l' = l_2 - l_1 \cos \alpha = l - l_1(1 + \cos \alpha);$$

$$l' = 22 - 9,3(1 + \cos 60^\circ) \approx 8,1 \text{ (cm)}.$$

*Aiškinamąjį sprendimą pateikė užduoties autorius doc. dr. Stasys Tamošiūnas.*

▲ Šis tekstas svetainėje [www.olimpas.lt](http://www.olimpas.lt) nuolat skelbiamas nuo 2023 11 24.

#### **Turnyro dalyvių sprendimų aptarimas / FT17-5 ▼**

Neprikaištingą užduoties sprendimą pateikė tik vienas turnyro dalyvis, o kiti atsakė ne į visus pateiktus klausimus ir klydo be tinkamo brėžinio pasiruošimo.

*Sprendimų aptarimą parengė užduoties autorius doc. dr. Stasys Tamošiūnas.*

▲ Šis tekstas svetainėje [www.olimpas.lt](http://www.olimpas.lt) nuolat skelbiamas nuo 2023 11 24.

#### **Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelė / FT17-5 ▼**

Nr.	Sprendimų vertinimo kriterijus	Vertė balais
1.	Strypo dalių ilgių skirtumas	3
2.	Masės centro padėtis	2
3.	Posūkio kampas	2
4.	Masės centro poslinkis	2
5.	Pasvaro pakabinimo vieta	1
6.	Nerodomi skaičiavimai (kiekvienam iš kriterijų Nr. 1-5)	-0,5
7.	Netikslumai (kiekvienam iš kriterijų Nr. 1-5)	iki (-1)
Didžiausias galimas sprendimų įvertinimas		10

*Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelę parengė užduoties autorius doc. dr. Stasys Tamošiūnas.*

▲ Šis tekstas svetainėje [www.olimpas.lt](http://www.olimpas.lt) nuolat skelbiamas nuo 2023 11 24.