

18-ASIS FIZIKOS TURNYRAS
7-oji užduotis Nr. FT18-7 / 2024 11 11 – 2024 12 08

Kūginė svyruoklė

Sąlyga / FT18-7 ▼

Kūginę svyruoklę sudaro rutuliukas, pakabintas $l = 80$ cm ilgio siūlu ant stačia kryptimi greitėjančiai judančios pakabos. Įsukus rutuliuką skriejimui apie stačią ašį $n = 0,6 \text{ s}^{-1}$ dažniu, siūlo sudaromo kūgio viršūnės kampas yra status. Raskite:

- 1) Pakabos pagreitį;
- 2) Dažnio pokytį, jei pakaba judėtų tolygiai ir kūgio viršūnės kampas išliktų status;
- 3) Kūgio viršūnės kampo pokytį, jei pakaba judėtų tolygiai ir rutuliukas būtų įsuktas tuo pačiu dažniu;
- 4) Siūlo įtempimo jėgos modulio santykinį pokytį (atžvilgiu jos dydžio, kai pakaba judėjo greitėdama) abiem (2 ir 3) atvejais.

Gravitacinio lauko stipris $g = 9,8 \text{ N/kg}$.

Užduotį parengė doc. dr. Stasys Tamošiūnas – Vilniaus universiteto Fizikos fakulteto Fotonikos ir nanotechnologijų instituto senjoras, mokyklos „Fizikos olimpas“ direktorius, steigėjų tarybos narys ir dėstytojas.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2024 11 11.

Aiškinamasis sprendimas / FT18-7 ▼

Duota: $l = 0,8 \text{ m}$; $n = 0,6 \text{ s}^{-1}$; $\alpha = 90^\circ$; $g = 9,8 \text{ N/kg}$.

Rasti: a_1 ; a_2 ; Δn ; $\Delta \alpha$; $\Delta F_1/F'$; $\Delta F_2/F'$.

Apžiūrėjus pateiktus klausimus aiškėja, kad pirmiausia reiktų rasti rutuliuko skriejimo apie stačią ašį dažnį n_0 , kai pakaba juda tolygiai (be pagreičio) arba išvis nejuda (yra rimties būvyje), o siūlo sudaromo kūgio viršūnės kampas yra status.

Rutuliuką (tegu jo masė m) veikia sunkio jėga $m\vec{g}$ ir siūlo įtempimo jėga $\vec{F}_0$. Pagal antrąjį Niutono dėsnį:

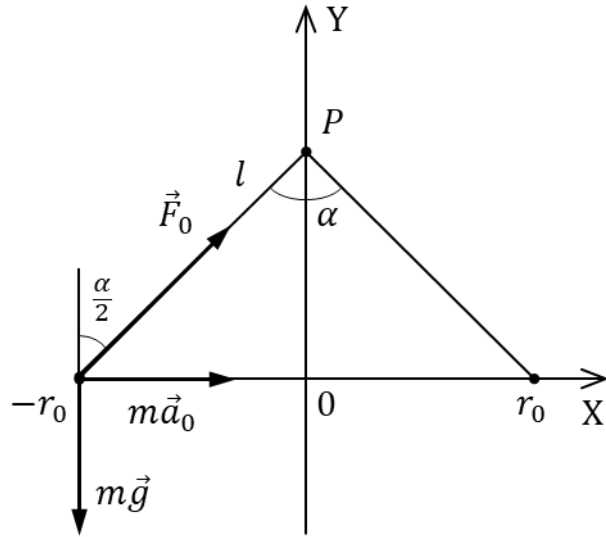
$$m\vec{g} + \vec{F}_0 = m\vec{a}_0.$$

Suprojektavę vektorius į pasirinktas koordinačių ašis X ir Y, turime dvi lygtis:

$$F_0 \sin \frac{\alpha}{2} = ma_0; \quad F_0 \cos \frac{\alpha}{2} - mg = 0.$$

Įcentrinis pagreitis $a_0 = w_0^2 r_0$, ciklinis dažnis $w_0 = 2\pi n_0$, rutuliuko trajektorijos gulsčioje plokštumoje (apskritimo) spindulys $r_0 = l \sin \frac{\alpha}{2}$, tai siūlo įtempimo jėga ir skriejimo dažnis:

$$F_0 = 4\pi^2 m n_0^2 l; \quad n_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l \cos \frac{\alpha}{2}}}; \quad n_0 = \frac{1}{2 \cdot 3,14} \sqrt{\frac{9,8}{0,8 \cos 45^\circ}} \approx 0,66 \text{ (s}^{-1}\text{)}.$$



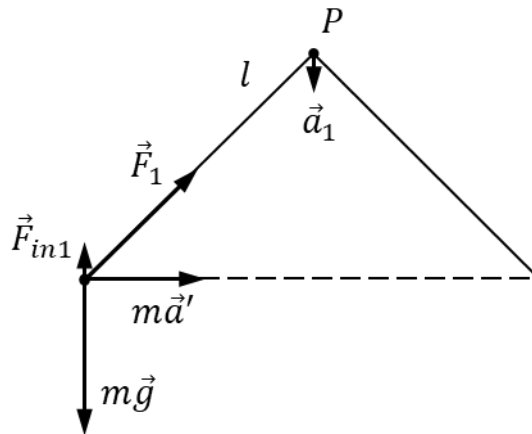
Pastebime, kad užduoties sąlygoje duotas dažnis n yra mažesnis už dabar rastą dažnį n_0 , tai ir siūlo įtempimo jėga $\vec{F}$, kuri tiesiai proporcinga dažnio kvadratui, yra atitinkamai mažesnė. Siūlo įtempimo jėga sumažėja iki $\vec{F}_1$, kai pakaba juda žemyn pagreičiu $\vec{a}_1$. Tuo pagreičiu judančioje atskaitos sistemoje įvedama rutuliuką veikianti inercijos jėga $\vec{F}_{in1} = -m\vec{a}_1$. Pagal antrąjį Niutono dėsnį:

$$m\vec{g} + \vec{F}_1 + \vec{F}_{in1} = m\vec{a}';$$

$$F_1 \sin \frac{\alpha}{2} = ma'; \quad F_1 \cos \frac{\alpha}{2} - mg + ma_1 = 0;$$

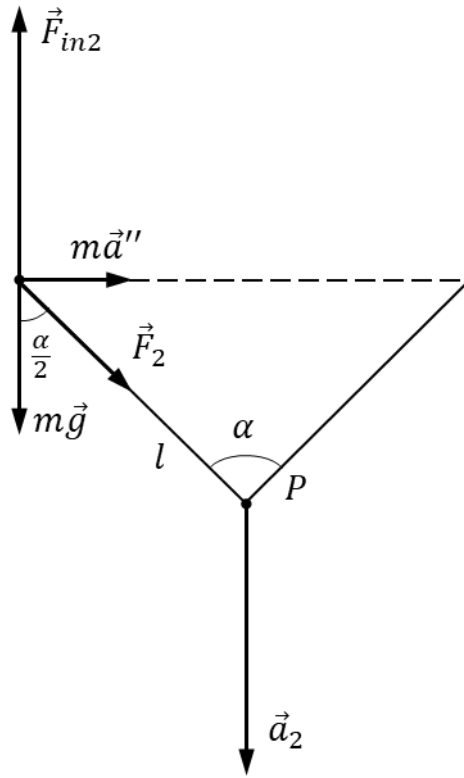
$$F_1 = 4\pi^2 mn^2 l; \quad n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g-a_1}{l \cos \frac{\alpha}{2}}}; \quad a_1 = g \left(1 - \frac{n^2}{n_0^2}\right); \quad a_1 = 9,8 \left(1 - \frac{0,6^2}{0,66^2}\right) \approx 1,7 \text{ (m/s}^2\text{)}.$$

Taigi, pakaba juda žemyn apie $1,7 \text{ m/s}^2$ pagreičiu.



Reikia pažymėti, kad tai nėra vienintelis atsakymas į klausimą apie pakabos pagreitį, kuris gali būti ir žymiai didesnis, nei ką tik surastas pagreitis a_1 .

Tarkim, jei pakaba judėtų žemyn pagreičiu $a_3 = 2g$, tada svyruoklės siūlas sudarytų apverstą kūgį virš pakabos su stačiu viršūnės kampų ir rutuliuko skriejimo dažniu n_0 , nes tuo pagreičiu judančioje atskaitos sistemoje įvedama inercijos jėga $\vec{F}_{in3} = -m\vec{a}_3$ būtų du kartus didesnė už rutuliuką veikiančią sunkio jėgą, kai siūlo įtempimo jėgų $\vec{F}_0$ ir $\vec{F}'_0$ moduliai vienodi.



Pakabai judant žemyn dydžiu a_1 mažesniu pagreičiu $a_2 = a_3 - a_1$, vėl turėsime mažesnę siūlo įtempimą (jėgų $\vec{F}_1$ ir $\vec{F}_2$ moduliai vienodi) ir tuo pačiu atitinkamai mažesnę užduoties sąlygoje duotą skriejimo dažnį n :

$$m\vec{g} + \vec{F}'_0 + \vec{F}_{in3} = m\vec{a}_0; \quad m\vec{g} + \vec{F}_2 + \vec{F}_{in2} = m\vec{a}';$$

$$F'_0 \sin \frac{\alpha}{2} = ma_0; \quad -F'_0 \cos \frac{\alpha}{2} - mg + ma_3 = 0;$$

$$F_2 \sin \frac{\alpha}{2} = ma'; \quad -F_2 \cos \frac{\alpha}{2} - mg + ma_2 = 0;$$

$$n_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{a_3 - g}{l \cos \frac{\alpha}{2}}}; \quad n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{a_3 - g - a_1}{l \cos \frac{\alpha}{2}}}.$$

$$a_2 = 2g - a_1; \quad a_2 = 2 \cdot 9,8 - 1,7 = 17,9 \text{ (m/s}^2\text{)}.$$

Taigi, rutuliuko skriejimo dažnio pokytis, jei pakaba judėtų tolygiai (arba net jei kristų tolygiai greitėdama pagreičiu a_3):

$$\Delta n = n_0 - n; \quad \Delta n = 0,66 - 0,6 = 0,06 \text{ (s}^{-1}\text{)}.$$

Dažnis nepakinta, jei kūgio viršūnės kampas sumažėja iki α' :

$$n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l \cos \frac{\alpha'}{2}}}; \quad \alpha' = 2 \arccos \frac{g}{4\pi^2 n^2 l}; \quad \Delta \alpha = \alpha' - \alpha;$$

$$\Delta \alpha = 2 \arccos \frac{9,8}{4 \cdot 3,14^2 0,6^2 0,8} - 90^\circ \approx -29^\circ.$$

Visais atvejais siūlo įtempimo jėga tiesiai proporcinga rutuliuko masei, jo skriejimo dažnio kvadratui ir siūlo ilgiui, tai santykiniai pokyčiai:

$$\frac{\Delta F_1}{F'} = \frac{F_0 - F'}{F'} = \frac{n_0^2}{n^2} - 1; \quad \frac{\Delta F_1}{F'} = \frac{0,66^2}{0,6^2} - 1 = 0,21; \quad \frac{\Delta F_2}{F'} = 0.$$

Aiškinaujamą sprendimą pateikė užduoties autorius doc. dr. Stasys Tamošiūnas.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2024 12 20.

Turnyro dalyvių sprendimų aptarimas / FT18-7 ▼

Visi turnyro dalyviai nagrinėjo tik tą atvejį, kai svyruoklės pakaba leidžiasi žemyn tolygiai greitėdama pagreičiu, mažesniu už laisvojo kritimo pagreitį.

Sprendimų aptarimą parengė užduoties autorius doc. dr. Stasys Tamošiūnas.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2024 12 20.

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelė / FT18-7 ▼

Nr.	Sprendimų vertinimo kriterijus	Vertė balais
1.	Pakabos pagreitis	4
2.	Rutuliuko skriejimo dažnio pokytis	2
3.	Kūgio viršūnės kampo pokytis	2
4.	Siūlo įtempimo jėgos santykinis pokytis	2
5.	Nerodomi skaičiavimai	-1
6.	Rasta tik viena pakabos pagreičio vertė	-2
7.	Kiti netikslumai (kiekvienam iš kriterijų Nr. 1-4)	iki (-1)
Didžiausias galimas sprendimų įvertinimas		10

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelę parengė užduoties autorius doc. dr. Stasys Tamošiūnas.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2024 12 20.