

18-ASIS FIZIKOS TURNYRAS
8-oji užduotis Nr. FT18-8 / 2024 12 02 – 2024 12 29

Plokščioji svyruoklė

Sąlyga / FT18-8 ▼

Plokščiąją svyruoklę sudaro toje pačioje stačioje plokštumoje šalia vienas kito išdėstyti du skrituliai, išpjauti iš to paties plono lakšto ir suklijuoti jų šonų sąlyčio vietoje. Skritulių spinduliai $R_1 = 6$ cm ir $R_2 = 8$ cm, o gulsčia sukimosi ašis, statmena jų plokštumai, eina per mažesnio skritulio centrą. Neatsižvelgdami į oro pasipriešinimą ir trintį į ašį, raskite:

- 1) Atstumą nuo sukimosi ašies iki masės centro;
- 2) Svyravimų dažnį;
- 3) Dažnio priklausomybę nuo atstumo, kuriuo sukimosi ašis gali būti perkelta į kitą vietą tiesėje, einančioje per skritulių centrus;
- 4) Didžiausią galimą dažnį;
- 5) Dažnį, sukimosi ašį perkėlus į didesnio skritulio centrą.

Gravitacinio lauko stipris $g = 9,8$ N/kg.

Užduotį parengė doc. dr. Stasys Tamošiūnas – Vilniaus universiteto Fizikos fakulteto Fotonikos ir nanotechnologijų instituto senjoras, mokyklos „Fizikos olimpas“ direktorius, steigėjų tarybos narys ir dėstytojas.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2024 12 02.

Aiškinamasis sprendimas / FT18-8 ▼

Duota: $R_1 = 0,06$ m; $R_2 = 0,08$ m; $\alpha = 90^\circ$; $g = 9,8$ N/kg.

Rasti: d ; f_0 ; a ; f_m ; f_1 .

Tegu lakšto ploto vieneto masė yra σ , tai ritinių masių m_1 ir m_2 sąsajos su jų plotais S_1 ir S_2 bei svyruoklės masės centro C koordinatė d :

$$m_1 = \sigma S_1 = \sigma \pi R_1^2; \quad m_2 = \sigma S_2 = \sigma \pi R_2^2; \quad y_1 = 0; \quad y_2 = R_1 + R_2;$$

$$d = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} = \frac{R_2^2 (R_1 + R_2)}{R_1^2 + R_2^2}; \quad d = \frac{0,08^2 (0,06 + 0,08)}{0,06^2 + 0,08^2} = 8,96 \text{ (cm)}.$$

Gauta masės centro koordinatė yra pakankamai tiksli, todėl galime ja naudotis tolimesniuose skaičiavimuose, neužgriozdindami būsimų formulių jos algebrine išraiška skritulių spinduliais.

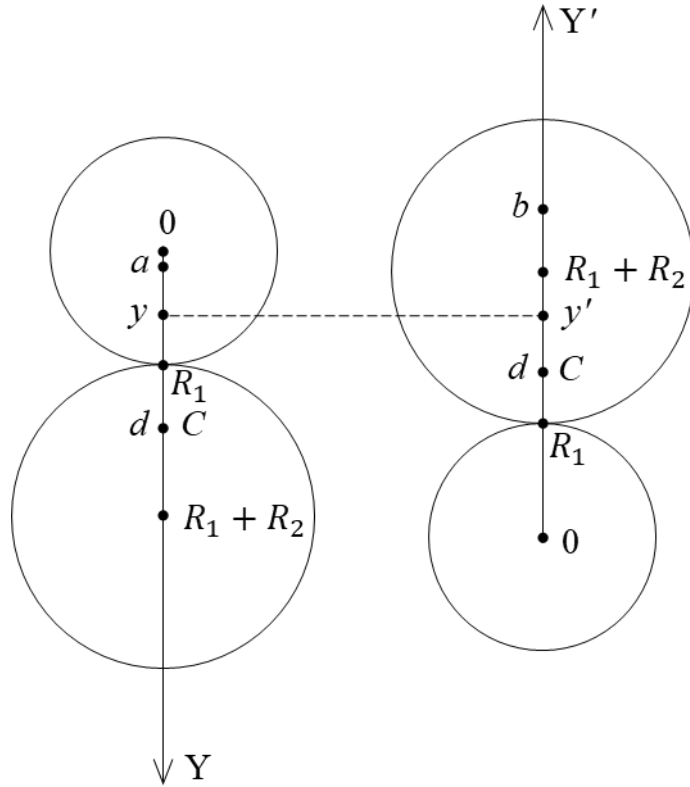
Svyruoklės svyravimų dažnis yra tiesiai proporcingas kvadratinei šakniai iš kreipimo momento ir atvirkščiai proporcingas kvadratinei šakniai iš inercijos momento I_0 :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)gd}{I_0}}.$$

Inercijos momentas sukimosi ašies O atžvilgiu lygus sumai abiejų skritulių inercijos momentų jų sukimosi ašių, einančių per masių centrus, atžvilgiu bei pagal Heigenso ir Šteinerio teoremą papildomo nario, lygaus sunkesnio skritulio masės ir jo centro atstumo iki ašies O kvadrato sandaugai:

$$I_0 = \frac{1}{2}m_1R_1^2 + \frac{1}{2}m_2R_2^2 + m_2(R_1 + R_2)^2.$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2(R_1^2 + R_2^2)gd}{R_1^4 + R_2^4 + 2R_2^2(R_1 + R_2)^2}}; \quad f_0 = \frac{1}{2 \cdot 3,14} \sqrt{\frac{2(0,06^2 + 0,08^2)9,8 \cdot 0,0896}{0,06^4 + 0,08^4 + 2 \cdot 0,08^2(0,06 + 0,08)^2}} \approx 1,209 \text{ (Hz)}.$$



Tegu sukimosi ašis perkeliama link svyruoklės masės centro C atstumu, lygiu koordinatei y . Tada svyruoklės svyravimų dažnio priklausomybė nuo tos koordinatės:

$$f(y) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)g(d - y)}{I(y)}}; \quad I(y) = \frac{1}{2}m_1R_1^2 + m_1y^2 + \frac{1}{2}m_2R_2^2 + m_2(R_1 + R_2 - y)^2;$$

$$f(y) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2(R_1^2 + R_2^2)g(d - y)}{R_1^4 + R_2^4 + 2R_1^2y^2 + 2R_2^2(R_1 + R_2 - y)^2}};$$

$$f(y) = \frac{1}{2 \cdot 3,14} \sqrt{\frac{2(0,06^2 + 0,08^2)9,8(0,0896 - y)}{0,06^4 + 0,08^4 + 2 \cdot 0,06^2y^2 + 2 \cdot 0,08^2(0,06 + 0,08 - y)^2}}.$$

Lentelėje pateiktos mažiau suapvalintos svyruoklės dažnių vertės rodo, kad jis didžiausias $f_m = 1,210$ Hz, kai sukimosi ašis yra atstumu $a \approx 0,5$ cm žemiau, nei mažesnio skritulio centras. Dažnis žymiai sumažėja, kai artėjama prie svyruoklės masės centro, kurį sukimosi ašiai pasiekus svyravimai nebevyksta – turime besiktę pusiausvyrą arba sukimąsi apie tą ašį.

$y, \text{ m}$	-0,06	-0,03	0	0,005	0,01	0,04	0,06	0,08	0,0896
$f, \text{ Hz}$	1,121	1,175	1,209	1,210	1,209	1,129	0,954	0,513	0

Kai koordinatė $y > d$, svyruoklė apsisverčia taip, kad jos pusiausvyros padėtyje mažesnis skritulys būna po didesniu skrituliu. Taip apsisvertus svyruoklei, dabar jau koordinatė $y' > d$, kreipiamasis momentas yra tiesiai proporcingas koordinatės skirtumui $y' - d$, o svyruoklės inercijos momentas ir svyravimų dažnio priklausomybė nuo koordinatės y' :

$$I' = \frac{1}{2}m_1R_1^2 + m_1y'^2 + \frac{1}{2}m_2R_2^2 + m_2(R_1 + R_2 - y')^2;$$

$$f' = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2(R_1^2 + R_2^2)g(y' - d)}{R_1^4 + R_2^4 + 2R_1^2 y'^2 + 2R_2^2 (R_1 + R_2 - y')^2}};$$

$$f' = \frac{1}{2 \cdot 3,14} \sqrt{\frac{2(0,06^2 + 0,08^2)9,8(y' - 0,896)}{0,06^4 + 0,08^4 + 2 \cdot 0,06^2 y'^2 + 2 \cdot 0,08^2 (0,06 + 0,08 - y')^2}}.$$

$y', \text{ m}$	0,1	0,12	0,14	0,16	0,17	0,175	0,18
$f, \text{ Hz}$	0,596	0,964	1,134	1,199	1,209	1,210	1,164

Lentelėje matyti, kad ir apsisvertusios svyruoklės tas pats didžiausias dažnis $f_m = 1,210 \text{ Hz}$, kai sukimosi ašis yra atstumu $b \approx 17,5 \text{ cm}$ virš mažesnio skritulio centro.

Tuo daliniu atveju, kuomet mums tenka atsakyti į užduoties penktąjį klausimą, kai sukimosi ašis eina per didesnio skritulio centrą, svyruoklės masės centras nuo sukimosi ašies yra nutolęs atstumu $R_1 + R_2 - d$, mažesnio skritulio centras nutolęs nuo jos atstumu $y'_1 = y_2 = R_1 + R_2$, tai inercijos momentas ir dažnis:

$$I_1 = \frac{1}{2} m_1 R_1^2 + m_1 (R_1 + R_2)^2 + \frac{1}{2} m_2 R_2^2; \quad f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)g(R_1 + R_2 - d)}{I_1}};$$

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2(R_1^2 + R_2^2)g(R_1 + R_2 - d)}{R_1^4 + R_2^4 + 2R_1^2 (R_1 + R_2)^2}};$$

$$f_1 = \frac{1}{2 \cdot 3,14} \sqrt{\frac{2(0,06^2 + 0,08^2)9,8(0,06 + 0,08 - 0,896)}{0,06^4 + 0,08^4 + 2 \cdot 0,06^2 \cdot (0,06 + 0,08)^2}} \approx 1,134 \text{ (Hz)}.$$

Aiškinamąjį sprendimą pateikė užduoties autorius doc. dr. Stasys Tamošiūnas.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2025 02 14.

Turnyro dalyvių sprendimų aptarimas / FT18-8 ▼

Turnyro dalyviai neįvertino svyruoklės apsisvertimo fakto, kai sukimosi ašis nuo mažesnio skritulio centro perkeliama daugiau, nei atstumas iki svyruoklės masės centro – tada turimoje dažnio išraiškoje negalimą neigiamą pošaknį paprasčiausiu būdu panaikino, imdami kreipiamojo momento modulį.

Sprendimų aptarimą parengė užduoties autorius doc. dr. Stasys Tamošiūnas.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2025 02 14.

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelė / FT18-8 ▼

Nr.	Sprendimų vertinimo kriterijus	Vertė balais
1.	Masės centro vieta	2
2.	Svyravimų dažnis	2
3.	Dažnio priklausomybė nuo atstumo	3
4.	Didžiausias dažnis	1
5.	Dažnis, kai sukimosi ašis eina per didesnio skritulio centrą	2
6.	Nerodomi skaičiavimai	-1
7.	Netikslumai (kiekvienam iš kriterijų Nr. 1-5)	iki (-1)
Didžiausias galimas sprendimų įvertinimas		10

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelę parengė užduoties autorius doc. dr. Stasys Tamošiūnas.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2025 02 14.