

3-ASIS FIZIKOS TURNYRAS
Užduotis Nr. FT3-15 / 2010 04 27 – 2010 05 23

Sąlyga / FT3-15 ▼

Strypas „kankinys”

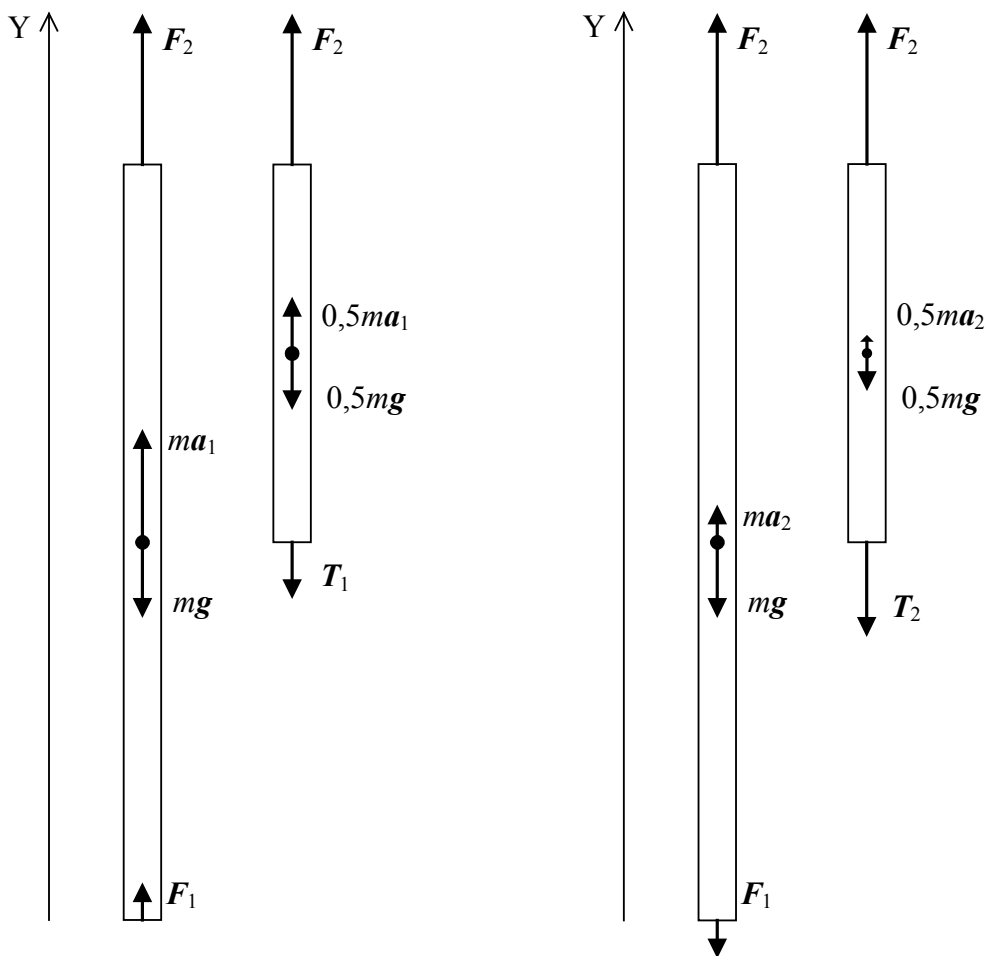
10 kg masės 1 cm skersmens vienalytis strypas tapo tikru „kankiniu“ – jis yra verčiamas nesisukdamas judėti stačia kryptimi aukštyn ir žemyn, veikiant jo galus 50 ir 200 N jėgomis. Tos jėgos jį visais galimais būdais ir tempia, ir gniuždo.

- 1) Kaip juda strypas?
- 2) Kokio dydžio įtempimas (jėga, veikianti skerspjūvio ploto vienetą) dėl to būna jo viduryje?
- 3) Išvardykite ir paaiškinkite, iš kokių medžiagų pavyktų pagaminti tokį strypą.
- 4) Įsivaizduokite ir aprašykite tokį galimą eksperimentą.

Užduotį parengė Vilniaus universiteto Taikomųjų mokslų instituto direktoriaus pavaduotojas, Vilniaus universiteto Fizikos fakulteto Puslaidininkių fizikos katedros docentas, mokyklos „Fizikos olimpas” direktorius, steigėjų tarybos narys ir dėstytojas dr. Stasys Tamošiūnas.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2010 04 27.

Užduoties aiškinamasis sprendimas / FT3-15 ▼



1 pav.

2 pav.

Duota: $m = 10 \text{ kg}$, $d = 1 \text{ cm} = 0,01 \text{ m}$, $F_1 = 50 \text{ N}$, $F_2 = 200 \text{ N}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Rasti: a , σ .

Tegu strypas keliamas aukštyn, kaip parodyta paveikslėliuose.

Strypą veikia sunkio jėga $m\vec{g}$ ir jėgos \vec{F}_1 , \vec{F}_2 . Pagal II Niutono dėsnį $m\vec{g} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = m\vec{a}_1$. Įtempimui (įtempimui) jo viduryje rasti patogiu nagrinėti 1 pav. pateikto strypo pusę. Tarkim, jo viršutinę pusę veikia sunkio jėga $0,5m\vec{g}$, jėga \vec{F}_2 ir įtempimo jėga \vec{T}_1 . Pagal II Niutono dėsnį

$$0,5m\vec{g} + \vec{F}_2 + \vec{T}_1 = 0,5m\vec{a}_1$$

Suprojektavę šiuos vektorius į vertikalią ašį Y gauname

$$-mg + F_1 + F_2 = ma_1,$$

$$-0,5mg + F_2 - T_1 = 0,5ma_1.$$

$$a_1 = \frac{F_1 + F_2}{m} - g, \quad a_1 = \frac{50 + 200}{10} - 10 = 15 \text{ (m/s}^2\text{)}.$$

Tai didžiausias pagreitis, kuriuo strypas gali kilti aukštyn. Viršutinė strypo dalis yra tempiama žemyn jėga

$$T_1 = F_2 - 0,5m(g - a_1) = 0,5(F_2 - F_1).$$

$$\sigma_1 = \frac{T_1}{S} = \frac{T_1}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{2(F_2 - F_1)}{\pi d^2}, \quad \sigma_1 = \frac{2 \cdot (200 - 50)}{3,14 \cdot 0,01^2} \approx 0,96 \text{ (MPa)}.$$

Tą patį gautume, jei jėgas \vec{F}_1 ir \vec{F}_2 sukeistume vietomis, tik dabar viršutinė strypo dalis viduryje būtų gniuždoma.

Įdomu tai, kad veikiant vienos krypties jėgomis \vec{F}_1 ir \vec{F}_2 , įtempimo jėga strypo viduje nepriklauso nuo jo masės, o tik nuo jėgų \vec{F}_1 ir \vec{F}_2 modulių skirtumo. Jei tos jėgos neveiktų, tai strypas kristų laisvai ir būtų neįtemptas.

Jei jėgos \vec{F}_1 ir \vec{F}_2 yra nukreiptos žemyn, tai strypas juda žemyn didžiausiu pagreičiu a_1' :

$$-mg - F_2 - F_1 = -ma_1',$$

$$-0,5mg - F_2 + T_2 = -0,5ma_1',$$

$$a_1' = \frac{F_1 + F_2}{m} + g, \quad a_1' = \frac{50 + 200}{10} + 10 = 35 \text{ (m/s}^2\text{)},$$

o įtempimas σ_1' viduryje nepakinta, tiek veikiant iš viršaus jėga \vec{F}_2 jis yra gniuždomas, o sukeitus vietomis jėgas \vec{F}_1 ir \vec{F}_2 jis yra tempiamas.

Kai strypo galus veikia priešingų kryptių jėgos \vec{F}_1 ir \vec{F}_2 (2 pav.), tai nesunku parodyti, kad jis yra įtemptas labiau nei kai tos jėgos yra vienos krypties. Tarkim, jėga \vec{F}_1 strypą apačioje tempia žemyn, o \vec{F}_2 viršuje aukštyn. Tada strypas kyla greitėdamas aukštyn:

$$-mg - F_1 + F_2 = ma_2,$$

$$-0,5mg + F_2 - T_2 = 0,5ma_2,$$

$$a_2 = \frac{F_2 - F_1}{m} - g, \quad a_2 = \frac{200 - 50}{10} - 10 = 5 \text{ (m/s}^2\text{)}.$$

Strypas viduryje tempiamas jėga

$$T_2 = F_2 - 0,5m(g + a_2) = 0,5(F_2 + F_1),$$

nepriklausomai nuo jo masės. Įtempimas

$$\sigma_2 = \frac{T_2}{S} = \frac{2(F_2 + F_1)}{\pi d^2}, \quad \sigma_2 = \frac{2(200 + 50)}{3,14 \cdot 0,01^2} \approx 1,6 \text{ (MPa)}.$$

Sukeitus vietomis jėgas \vec{F}_1 ir \vec{F}_2 strypas leidžiasi didesniu pagreičiu a_2' :

$$\begin{aligned}
 -mg + F_1 - F_2 &= -ma_2', \\
 -0,5mg + F_1 - T_3' &= -0,5ma_2', \\
 a_2' &= \frac{F_2 - F_1}{m} + g, \quad a_2' = \frac{200 - 50}{10} + 10 = 25 \text{ (m/s}^2\text{)},
 \end{aligned}$$

strypas viduryje irgi yra tempiamas, o įtempimas nepakinta.

Kai strypo galus abi jėgos spaudžia, tai jis viduryje yra gniuždomas sukeltant tą patį įtempimą. Jei viršuje jis spaudžiama jėga \vec{F}_2 , tai leidžiasi žemyn pagreičiu $a_2'' = a_2' = 25 \text{ m/s}^2$.

Gautų rezultatų suvestinė visiems galimiems jėgų veikimo atvejams yra pateikta lentelėje, kurioje F_V - strypo viršuje, F_A - jo apačioje veikiančių jėgų, o a - pagreičio projekcijos į pasirinktą koordinačių ašį Y. Raidė T rodo, kad viduryje strypas yra tempiamas, o G – gniuždomas.

$F_V, \text{ N}$	$F_A, \text{ N}$	$a, \text{ m/s}^2$	$\sigma, \text{ MPa}$	Poveikis
200	50	15	0,96	T
50	200	15	0,96	G
-200	-50	-35	0,96	G
-50	-200	-35	0,96	T
200	-50	5	1,6	T
50	-200	-25	1,6	T
-200	50	-25	1,6	G
-50	200	5	1,6	G

Didžiausias įtempimas yra pasiekiamas jėgos F_2 veikimo vietoje. Jei ši jėga veikia visą strypo skerspjūvį, tai sukelia įtempimą

$$\sigma_3 = \frac{F_2}{S} = \frac{4F_2}{\pi d^2}, \quad \sigma_3 = \frac{4 \cdot 200}{3,14 \cdot 0,01^2} \approx 2,55 \text{ (MPa)}.$$

Tokio dydžio įtempimas yra žymiai mažesnis nei ribinis metalų ar jų lydinių įtempimas, kuriam esant jie suyra: apie 200 kartų nei plieno (300 – nerūdijančio plieno), 80 – vario, 5 – švino, tad nėra problemų dėl metalų pasirinkimo. Tačiau, jei paskaičiuotume strypo ilgį pagal formulę

$$l = \frac{4m}{\pi d^2 \rho},$$

čia ρ – medžiagos tankis, tai plieno, vario ir švino strypų ilgius gautume žymiai didesnius nei jų skersmuo d :

$$l_1 = \frac{4 \cdot 10}{3,14 \cdot 0,01^2 \cdot 7,9 \cdot 10^3} \approx 16,1 \text{ (m)}, \quad l_2 = \frac{4 \cdot 10}{3,14 \cdot 0,01^2 \cdot 8,9 \cdot 10^3} \approx 14,3 \text{ (m)},$$

$$l_3 = \frac{4 \cdot 10}{3,14 \cdot 0,01^2 \cdot 11,3 \cdot 10^3} \approx 11,3 \text{ (m)}.$$

Jei tempiant dėl ilgio problemų neturėtų kilti, tai tokie ilgi “strypai” gniuždomi sulinktu, tad tektų juos (vijas) patalpinti į vamzdelius. Paprasčiausia atlikti 2 pav. atitinkantį tempimo eksperimentą, panaudojus tam nekilnojamą skridinį, permestą per jį virvę, kurios viename gale pakabintas strypas, o jo apačioje – masės m_1 pirmasis pasvaras; kitame virvės gale – masės m_2 antrasis pasvaras, sunkesnis nei strypas ir pirmasis pasvaras juos kartu paėmus. Tada, neatsižvelgę į virvės sunkį ir skridinio pasipriešinimą sukimuisi, gautume:

$$m_1 = \frac{F_1}{g + a_2}, \quad m_1 = \frac{50}{10 + 5} \approx 3,3 \text{ (kg)};$$

$$m_2 = \frac{F_2}{g - a_2}, \quad m_2 = \frac{200}{10 - 5} = 40 \text{ (kg)}.$$

Užduoties aiškinamąjį sprendimą pateikė užduoties autorius dr. Stasys Tamošiūnas.

Turnyro dalyvių sprendimų aptarimas / FT3-15 ▼

Užduotį sprendė, deja, turnyro dalyvių mažuma. Ne visiems sprendusiems pavyko nustatyti visus galimus strypo tolygiai kintamo judėjimo, tuo pačiu tempimo ir gniuždymo variantus. Svarbu buvo nustatyti ne tik tai, kad strypas gali būti pagamintas iš bet kurio žinomo metalo, bet ir tai, kad jis labai ilgas (viena), gali įlinkti, o tai komplikuoja gniuždymo eksperimentą. Natūralu, kad strypą gniuždo jį spaudžiančios jėgos. Jei strypą viena jėga spaudžia, o kita gniuždo, tarkim, kaip parodyta užduoties aiškinamojo sprendimo 2 pav., tai strypą padalijus ne pusiau, o dalimis y (atstumas nuo jėgos F_1 veikiamo strypo galo) ir $l-y$ (atstumas nuo jėgos F_2 veikiamo strypo galo), analogiškai, kaip aiškinamajame sprendime, taikant II Niutono dėsnį nesunku parodyti, kad strypas tempiamas aukščiau nei padalijimo vieta ir gniuždomas žemiau nei ta vieta, įtempimui tiesiai proporcingai didėjant kartu su nuotoliu nuo tos padalijimo vietos, o padalijimo vietoje, priklausančioje nuo jėgų F_1 ir F_2 taip:

$$y = \frac{F_1}{F_1 + F_2} l,$$

strypas yra neįtemptas. Viršutiniame gale tempiant yra pasiekiamas įtempimas σ_3 , o apatiniame gale – gniuždant sukeliamas įtempimas

$$\sigma_4 = \frac{4F_1}{\pi d^2}, \quad \sigma_4 = \frac{4 \cdot 50}{3,14 \cdot 0,01^2} \approx 0,64 \text{ (MPa)}.$$

Nesusrūpinusiam galimu strypo ilgiu turnyro dalyviui priimtina strypui medžiaga buvo ir palyginti trapus stiklas, kurio tankis yra apie 3 kartus mažesnis, o tuo pačiu strypo ilgis tiek pat kartų didesnis, nei paminėtų čia metalų. 30 – 50m ilgio stikliniam strypui nebent reiktų numatyti eksperimento vietą šalia dangoraižio. Kaip tokį strypą pristatyti į eksperimento vietą nesulaužius, o kaip įkurdinti ten eksperimento įrangą ir pačius eksperimentatorius? Nesiekiant įžeisti tenka prisiminti, kad pagal „Fausto” Mefistofelį „teorija yra sausa šaka, užtat gyvenimo vaisingas medis žydi”.

Užduoties sprendimo aptarimą parengė užduoties autorius dr. Stasys Tamošiūnas.

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelė / FT3-15 ▼

Nr.	Sprendimų vertinimo kriterijus	Vertė balais
1.	Strypo judėjimo analizė	4
2.	Įtempimo jo viduryje radimas	4
3.	Strypo medžiagos ir galimo eksperimento ypatumų įvertinimas	2
4.	Pateikta ne pagal turnyro reikalavimus	-1
5.	Kiti netikslumai p. 1-3	po – 0,5
Maksimalus sprendimo įvertinimas		10

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelę parengė užduoties autorius dr. Stasys Tamošiūnas.