

4-ASIS FIZIKOS TURNYRAS
Užduotis Nr. FT4-3 / 2010 08 16 – 2010 09 02

Sąlyga / FT4-3 ▼

Šratų suartėjimas

Du vienodi maži rutuliukai (šratai) buvo vertikalia kryptimi pakelti nuo Žemės paviršiaus tiek, kad pirmasis šratas yra 9,8 m aukštyje virš antrojo. Pirmąjį šratą paleidžia kristi be pradinio greičio, o antrąjį šratą tuo pačiu metu iššauna 45° kampū į horizontą.

1. Koku mažiausiu atstumu priartėja šratai vienas prie kito?
2. Kuriuo laiko momentu nuo jų judėjimo pradžios tai įvyksta, jei antrojo šrato pradinis greitis:
 - a) 5 m/s;
 - b) 10 m/s;
 - c) 100 m/s?
3. Parodykite brėžinyje $z(x)$ šratų padėtis tais laiko momentais ir mažiausią atstumą tarp jų (mastelis – 1 cm atitinka 2 m).
4. Tame pačiame brėžinyje pateikite ir antrojo šrato judėjimo trajektoriją iki tol, kol jis horizontalia kryptimi pasislenka:
 - a) 6 m;
 - b) 15 m;
 - c) 10 m.

Užduotį parengė Vilniaus universiteto Taikomųjų mokslų instituto direktoriaus pavaduotojas, Vilniaus universiteto Fizikos fakulteto Puslaidininkių fizikos katedros docentas, mokyklos „Fizikos olimpas“ direktorius, steigėjų tarybos narys ir dėstytojas dr. Stasys Tamošiūnas.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2010 08 16.

Aiškinamasis sprendimas / FT4-3 ▼

Duota: $h = y_{01} - y_{02} = 9,8$ m; $\alpha = 45^\circ$; $v_{01} = 5$ m/s, $v_{02} = 10$ m/s, $v_{03} = 100$ m/s;
 $x_1 = 6$ m, $x_2 = 15$ m, $x_3 = 10$ m; $g = 9,8$ m/s².

Rasti: l' , t_1 , t_2 , t_3 , $y(x)$

Sprendami užduotį neatsižvelgiame į oro pasipriešinimo įtaką šratų judėjimui. Tada vertikalia kryptimi jie juda pagreičiu g (antrojo šrato pradinis greitis yra $v_0 \sin \alpha$), o horizontalia – tolygiai (antrojo šrato greitis yra $v_0 \cos \alpha$). Šratų koordinatės bet kuriuo laiko momentu t :

$$x_1 = 0, \quad y_1 = y_{01} - \frac{gt^2}{2},$$

$$x_2 = v_0 \cos \alpha \cdot t, \quad y_2 = y_{02} + v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$

Atstumas tarp šratų

$$l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{v_0^2 t^2 - 2hv_0 \sin \alpha \cdot t + h^2}.$$

Mažiausias atstumas randamas prilyginus nuliui pošaknio išvestinę pagal laiką:

$$2v_0^2 t - 2hv_0 \sin \alpha = 0,$$

iš čia laiko momentas

$$t = \frac{h \sin \alpha}{v_0}, \quad t_1 = \frac{9,8}{5} \sin 45^\circ \approx 1,39 \text{ (s)},$$

$$t_2 \approx 0,69 \text{ s}, \quad t_3 \approx 0,07 \text{ s}.$$

Mažiausias atstumas tarp šratų

$$l' = \sqrt{h^2 \sin^2 \alpha - 2h^2 \sin^2 \alpha + h^2} = h \cos \alpha,$$

$$l' = 9,8 \cos 45^\circ \approx 6,93 \text{ (m)}.$$

Antrojo šrato trajektorijoms braižyti yra patogiau pasirinkti jo pradinę koordinatę $y_{02} = 0$ ir apskaičiuoti abi koordinatas pasirinktais laiko momentais – tokiais, kad koordinatė x neviršytų užduotyje pateiktų verčių. Apskaičiavus šratų koordinates laiko momentais t_1, t_2 ir t_3 ($\{0; 0,39\}$, $\{4,9; -4,51\}$; $\{0; 7,45\}$, $\{4,9; 2,55\}$ ir $\{0; 9,78\}$, $\{4,9; 4,88\}$), tie taškai yra sujungiami tiesėmis l_1, l_2 ir l_3 , žyminčiomis mažiausią atstumą tarp šratų.

Reikia pastebėti, kad mažiausias atstumas tarp šratų nepriklauso nuo antrojo šrato pradinio greičio, kai to šrato pradinis aukštis virš Žemės paviršiaus lygio y_0 atžvilgiu yra ne mažesnis kaip

$$y_{02} - y_0 = l_1' \sin \alpha - h + \frac{gt_1^2}{2} = h(\cos \alpha \cdot \sin \alpha - 1) + \frac{g}{2} \left(\frac{h \sin \alpha}{v_{01}} \right)^2,$$

$$y_{02} - y_0 = 9,8(\cos 45^\circ \cdot \sin 45^\circ - 1) + \frac{9,8}{2} \left(\frac{9,8 \sin 45^\circ}{5} \right)^2 \approx 4,51 \text{ (m)}.$$

Jei antrasis šratas v_{01} pradiniu greičiu būtų iššautas iš mažesnio aukščio, tai gautume $l' < 6,93$ m, o pats mažiausias atstumas tarp šratų būtų tik jiems nukritus ant Žemės, kai antrasis šratas iššaukiamas nuo jos paviršiaus ($y_{02} = 0$).

Tada $y_2 = 0$, kai $t' = \frac{2v_{01} \sin \alpha}{g}$,

$$t' = \frac{2 \cdot 5 \sin 45^\circ}{9,8} \approx 0,72 \text{ (s)}.$$

Pats mažiausias atstumas tarp šratų

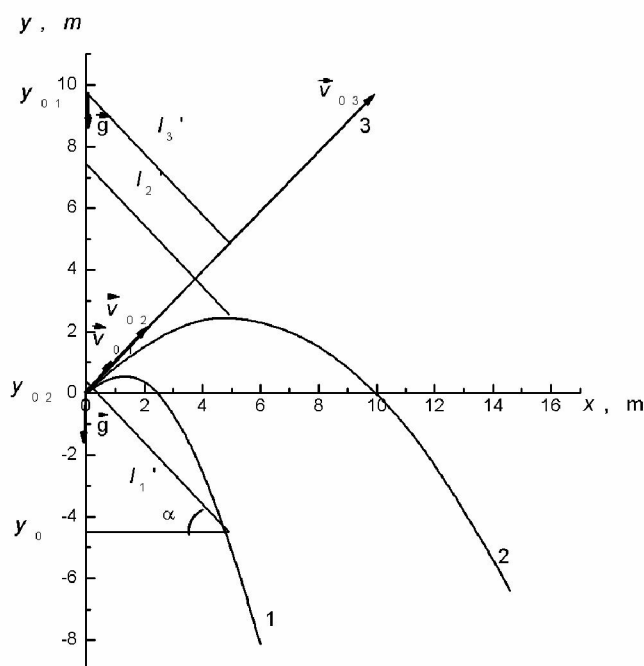
$$l' = v_{01} \cos \alpha \cdot t' = \frac{v_{01}^2 \sin 2\alpha}{g},$$

$$l' = \frac{5^2 \sin 90^\circ}{9,8} \approx 2,55 \text{ (m)}.$$

Suprantama, kad toks atstumas tarp šratų būna laiko momentu, lygiu pirmojo šrato kritimo iki Žemės paviršiaus trukmei:

$$t' = \sqrt{\frac{2h}{g}}, \quad t' = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,8}{9,8}} \approx 1,41 \text{ (s)}.$$

Taigi, priklausomai nuo 5 m/s greičiu mesto antrojo šrato pradinio aukščio virš Žemės paviršiaus mažiausias nuotolis tarp šratų gali būti nuo 2,55 iki 6,93 m, kai tas aukštis kinta nuo 0 iki 4,51 m ir daugiau.



Užduoties aiškinamąjį sprendimą pateikė užduoties autorius doc. dr. Stasys Tamošiūnas.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2010 12 28.

Turnyro dalyvių sprendimų aptarimas / FT4-3 ▼

Tik vienas turnyro dalyvis atsižvelgė į antrojo šrato pradinio aukščio įtaką mažiausiam atstumui tarp šratų, nors tai itin svarbu, kai antrasis šratas yra iššautas 5 m/s greičiu.

Vis dar yra pateikusių sprendimus be paaiškinimų, tik padrikus formulių rinkinius, fizikinius dydžius be dimensijų, brėžinius be užrašų skalėse ir prašyto mastelio.

Užduoties sprendimų aptarimą parengė užduoties autorius dr. Stasys Tamošiūnas.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2010 12 28.

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelė / FT4-3 ▼

Nr.	Sprendimų vertinimo kriterijus	Vertė balais
1.	Rastas mažiausias atstumas tarp šratų	4
2.	Apskaičiuoti laikai	3
3.	Nubrėžtos trajektorijos	3
4.	Neatsižvelgta į antrojo šrato pradinę padėtį	-1,5
5.	Pateikta ne pagal reikalavimus	-1
6.	Kiti netikslumai p. 1-3	po -0,5
Maksimalus sprendimo įvertinimas		10

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelę parengė užduoties autorius doc. dr. Stasys Tamošiūnas.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2010 12 28.