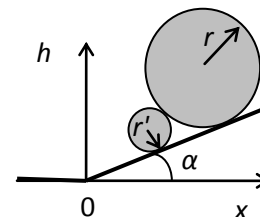


6-ASIS FIZIKOS TURNYRAS
11-oji užduotis Nr. FT6-11 / 2013 01 29 – 2013 02 25

Sąlyga / FT6-11 ▼

Galinėjasi du ritiniai

Ant nuožulniosios plokštumos padėti du vienodo ilgio ritiniai, kaip parodyta paveiksle. $\alpha = 20^\circ$, $r = 0,2$ m, $r' = 0,03$ m, slydimo trinties koeficientas μ visiems paviršiams vienodas, ritinio riedėjimo trintis maža. Ritiniai pagaminti iš tos pačios kietos plastiškos medžiagos, todėl smūgių trukmė maža, o deformacijos smūgių metu nežymios.



1) Kokiam mažiausiam trinties koeficientui μ_{\min} esant ritiniai nejudės?

2) Mažesnysis ritinys padedamas horizontalioje paviršiaus dalyje ($x = -0,5$ m), o didesnysis ritinys padedamas aukštyje $h = 0,3$ m ir paleidžiamas be pradinio greičio. Trinties koeficientas $\mu = 0,4$. Koks bus didesniojo ritinio centro greitis prieš pat atsimušant į mažesnįjį ritinį?

3) Kokie ritinių greičiai nusistovės po smūgio?

Užduotį parengė mokyklos „Fizikos olimpas“ steigėjų tarybos narys, ilgametis mokyklos direktorius (11 m.) ir šio Fizikos turnyro užduočių parengimo spręsti ir jų sprendimų vertinimo komisijos pirmininkas prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2013 01 29.

Užduoties aiškinamasis sprendimas / FT6-11 ▼

1) Paveiksle pateiktas ritinius veikiančių sunkio jėgų paskirstymas. Pagal sąlygą gauname

$$m = \frac{m'r^2}{r'^2}.$$

Taip pat gauname

$$\sin \beta = \frac{r - r'}{r + r'}$$

$$\gamma = 45^\circ - \beta/2,$$

$$F_1 = \frac{mg \sin \alpha}{\cos \beta},$$

$$F_2 = \frac{mg \cos(\alpha + \beta)}{\cos \beta},$$

$$\vec{F}' = \vec{F}_1 + m'\vec{g},$$

$$F'_{11} = (m' + m)g \sin \alpha,$$

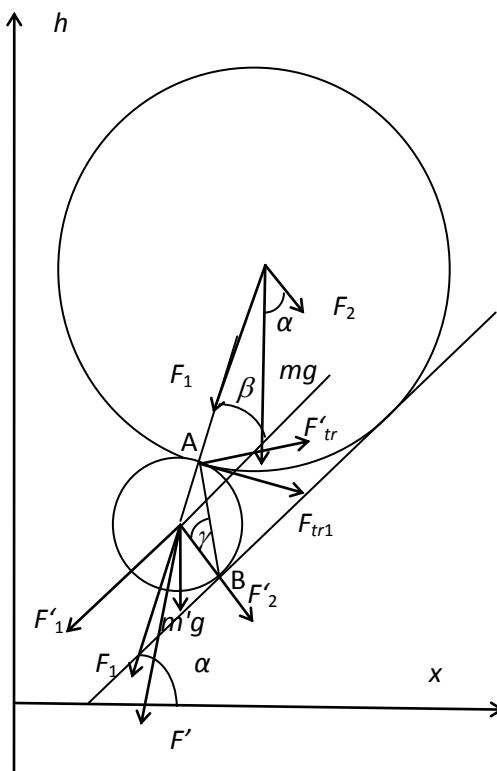
$$F'_{22} = \left(m' \cos \alpha + \frac{m \sin \alpha \sin \beta}{\cos \beta} \right) g.$$

Jei ritiniai vienas kito atžvilgiu nejudą, jie kaip kietas kūnas nuožulniaja plokštuma neslys, jei bus patenkinta sąlyga

$$\mu \geq \tan \alpha, \mu_1 = 0,364.$$

Didesnįjį ritinį veikia trinties jėgos $F_{tr1} = \mu F_1$ ir $F_{tr2} = \mu F_2$, jų santykis

$$\frac{F_{tr2}}{F_{tr1}} = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin \alpha} = 1,11.$$



Matome, kad ritiniams riedant didesnysis ritinys gali slysti mažesniuoju ritiniu neslysdamas nuožulniaja plokštuma. Mažesnis ritinys neriedės, jei bus patenkinta sąlyga

$$F_{tr1} \cos \gamma \text{ AB} > r'F'_1, \quad \mu > \frac{(r^2 + r'^2) \sqrt{r'}}{r^2 \sqrt{r}}, \quad \mu_2 = 0,396.$$

Taigi, ritiniai nejudės, kai trinties koeficientas bus $\mu \geq \mu_{\min} = 0,396$.

2) Paleistas ritinys riedės nepraslysdamas. Iš energijos tvermės dėsnio

$$mg(h - h') = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$$

pasiekus horizontalų paviršių jo centro greitis ir ritinio sukimosi sąlygotas jo paviršiaus greitis centro atžvilgiu bus

$$v = 2 \sqrt{\frac{g(h - 2r \sin^2 \alpha/2)}{3}}, \quad v = 1,94 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ritinio centro greičio horizontalioji ir vertikalioji dedamosios atitinkamai lygios

$$v_1 = v \sin \alpha = 1,82 \text{ m/s},$$

$$v_2 = v \cos \alpha = 0,66 \text{ m/s}.$$

Plastiško smūgio į horizontalų pagrindą metu (smūgio trukmė τ) vertikalioji dedamoji išnyksta. Sąveikos su pagrindu jėga $F(\tau')$ pakeičia judesio kiekį dydžiu

$$\int_0^\tau F(\tau') d\tau' = mv_2.$$

Smūgio metu ritinį veikia trinties jėga $\mu F(\tau')$, kuri stabdo ritinio sukimąsi, o todėl didėja jo centro greitis. Prieš smūgį ritinio kampinis greitis $\omega = rv$, smūgio metu jis gali sumažėti dydžiu

$$\Delta\omega = \frac{\mu r m v_2}{I},$$

čia ritinio inercijos momentas $I = mr^2/2$, todėl $\Delta\omega = 2\mu v_2/r$, o ritinio paviršiaus greitis jo centro atžvilgiu būtų

$$v'_1 = v - \Delta\omega r = v - 2\mu v_2, \quad v'_1 = 1,41 \text{ m/s}.$$

Kadangi $v_1 > v'_1$, ritinio paviršiaus greitis smūgio metu tik susilygins su jo centro greičiu. Veikiant jėgai μF ritinio centro pagreitis $a = \mu F/m$, o jo paviršiaus pagreitis $a' = \varepsilon r = \frac{\mu F r^2}{I} = 2a$. Taigi, ritinio paviršiaus greičio pokytis $\Delta v' = 2\Delta v$. Tada galutinis ritinio greitis v'

$$v' = v_1 + \Delta v = v - \Delta v', \quad v' = \frac{v + 2v_1}{3}, \quad v' = 1,86 \text{ m/s}.$$

Tokiu greičiu ritinys riedės nepraslysdamas iki smūgio į mažesnį ritinį.

3) Smūgio metu didesnį ritinį veiks sąveikos su mažesniuoju ritiniu jėga $F_1(\tau')$ ir trinties jėga

$$F_{tr} = \mu F_1(\tau')$$

($0 \leq \tau' \leq \tau''$, τ'' – smūgio trukmė),

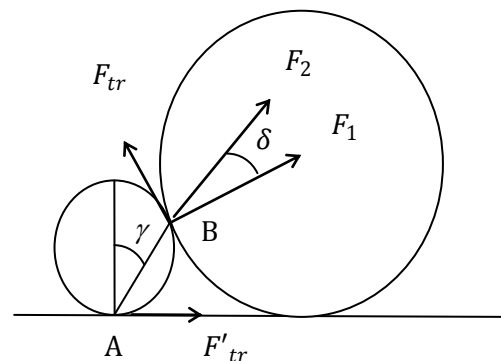
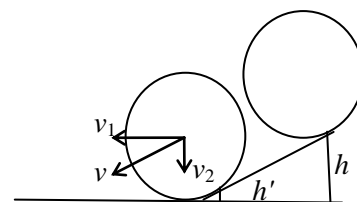
tų jėgų atstojamoji

$$F_2(\tau') = F_1(\tau') \sqrt{1 + \mu^2}.$$

Mažesnį ritinį veiks tokios pat jėgos, tik priešingos krypties, o taip pat pagrindo reakcijos jėga $N = F_2 \sin(\beta + \delta)$, ($\text{tg } \delta = \mu$), ir jos sukurta trinties jėga $F'_{tr}(\tau') = \mu N$. Į sunkio jėgą smūgio metu neatsižvelgiame.

Mažesnį ritinį veikiančių trinties jėgų santykis

$$\frac{F_{tr}}{F'_{tr}} = \frac{1}{\sin(\beta + \gamma) \sqrt{1 + \mu^2}} = 0,99.$$



Matome, kad mažesnis ritinys galėtų riedėti pagrindu neslysdamas ir slysdamas didesniu ritiniu. Tai galėtų būti, jei jėgos F_1 sukurtas momentas taško A atžvilgiu būtų didesnis už F_{tr} sukurtą momentą. Apskaičiuojame tų momentų santykį

$$\frac{F_1 AB \sin \gamma}{F_{tr} AB \cos \gamma} = \frac{\sin \gamma}{\mu \cos \gamma} = 0,97.$$

Taigi, stabdantis mažesniojo ritinio riedėjimą momentas didesnis. Dar įvertiname horizontalia kryptimi veikiančių jėgų santykį

$$\frac{F_1 \cos \beta}{F'_{tr} + F_{tr} \sin \beta} = \frac{\cos \beta}{\mu [\sin(\beta + \gamma) \sqrt{1 + \mu^2} + \sin \beta]} = 0,97.$$

Matome, kad mažesnis ritinys nejudės. Didesnis ritinys judės sukdamasis. Jo centro pagreičio dedamoji, nukreipta F_1 kryptimi

$$a_{F_1} = \frac{F_1}{m},$$

o jo tos krypties greičio dedamoji po smūgio

$$v_B = v' \cos \beta - \frac{1}{m} \int_0^{\tau''} F_1 d\tau' = 0, \quad \frac{1}{m} \int_0^{\tau''} F_1 d\tau' = v' \cos \beta.$$

Tada po smūgio didesnis ritinys judės kaip kamu $\varphi = 90^\circ - \beta$ į horizontą greičiu v'' mestas kūnas. Prieš smūgį krypties φ greičio dedamoji $v''' = v' \sin \beta$, todėl smūgio metu ta dedamoji didės, o ritinio sukimosi greitis mažės, kol ritinio paviršiaus greitis centro atžvilgiu susilygins su centro slenkamojo judėjimo greičiu. Kaip ir antroje užduotyje gauname

$$v'' = \frac{v'(1+2 \sin \beta)}{3}, \quad v'' = 1,54 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Tokiu pat greičiu centro atžvilgiu judės besisukančio ritinio paviršius. Ritinio centro greičio vertikalioji ir horizontalioji dedamosios atitinkamai bus

$$v_v = v'' \cos \beta = 1,04 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_h = v'' \sin \beta = 1,14 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Taip mestas kūnas pakyla į aukštį

$$H = \frac{v_v^2}{2g}, \quad H = 0,07 \text{ m}$$

ir nulekia atstumą

$$L = \frac{2v_v v_h}{g}, \quad L = 0,24 \text{ m}.$$

Taigi, didesnis ritinys perlėks per mažesnįjį. Atsimušus į pagrindą jo vertikalioji greičio dedamoji išnyks, o horizontalioji greičio dedamoji (centro greitis) susilygins su paviršiaus greičiu centro atžvilgiu. Kaip jau skaičiavome anksčiau, gauname nusistovėjusį didesniojo ritinio centro greitį

$$v_n = \frac{v''(1+2 \sin \beta)}{3}, \quad v_n = 1,27 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Tokiu greičiu neslysdamas riedės didesnis ritinys. Mažesnis ritinys nejudės.

Užduoties aiškinamąjį sprendimą pateikė jos autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2013 04 11.

Turnyro dalyvių sprendimų aptarimas / FT6-11 ▼

- 1) Tik dalis sprendusiųjų pastebėjo ir teisingai įvertino mažesniojo ritinio galimybę riedėti.
- 2) Beveik niekas nepastebėjo, kad nusileisdamas iš aukščio h ritinys horizontalų pagrindą pasiekia anksčiau, nenuėjęs viso aukščio. Tai nežymiai sumažina ritinio greitį. Taip pat ne visi įvertino greičio pokyčio smūgio metu.
- 3) Pilnai šios užduoties neišsprendė niekas, nors dalis sprendusiųjų bandė įvertinti trinties poveikį mažesniajam ritiniui ir ritinių sąveikai.

Užduoties sprendimų aptarimą parengė jos autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2013 04 11.

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelė / FT6-11 ▼

Nr.	Sprendimų vertinimo kriterijus	Vertė balais
1.1.	Nustatytas minimalus trinties koeficientas, kuriam esant ritiniai neslys	1
1.2.	Nustatytas minimalus trinties koeficientas, kuriam esant mažesnysis ritinys neriedės	2
2.1.	Nustatytas greitis, kurį įgaus ritinys prieš atsimušdamas į pagrindą	1
2.2.	Nustatytas greitis, kurį įgaus ritinys po smūgio	2
3.1.	Nustatyti mažesnįjį ritinį veikiančių jėgų ir jėgos momentų santykiai smūgio metu	2
3.2.	Nustatytas didesniojo ritinio greitis po smūgio į mažesnįjį ritinį	1
3.3.	Nustatytas didesniojo ritinio greitis po smūgio į pagrindą	1
Didžiausias galimas sprendimo įvertinimas		10

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelę parengė užduoties autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2013 04 11.