

**8-ASIS FIZIKOS TURNYRAS**  
**3-oji užduotis Nr. FT8-3 / 2014 07 28 – 2014 08 24**

**Sąlyga / FT8-3 ▼**

**Jono eksperimento slėpinys**

Jonas žino, nes tą pats namuose išbandė - pakabinti ant siūlo metalinį šratą paprasčiausia jį apgaubus plona polietileno plėvele ir taip pagamintą “maišą” su šratu užrišus siūlu viename jo gale, o kitą siūlo galą pririšus prie pakabos. Pakaba – plona vinis, įkalta plaktuku į stačią lentą. Jono turima liniuote išmatuotu 1 m atstumu nuo šrato centro, o ties ta vinimi ant lentos yra priklijuotas jo mokyklinis matlankis siūlo atlenkimo nuo pusiausvyros padėties kampui matuoti. Jonas turėjo dar keturias vinis, kurias kas pusę eksperimento valandos sukaldė šalia siūlo kas 20 cm žemiau pakabos. Kaip tai nesudėtinga padaryti, turint liniuotę, vinių, plaktuką, matlankį ir klijų!

Jonas atlenkė svyruoklę nuo pusiausvyros padėties, sekundometru nustatė keturių pilnų svyravimų trukmę, ją padalijo iš keturių ir taip rado svyravimų periodą. Po to įkalė paeiliui keturias vinis, matavo užkliūvančios už vinių svyruoklės svyravimų periodus, nubrėžė jų priklausomybės nuo įkaltų vinių atstumo iki pakabos grafikus ir nunešė juos parodyti savo fizikos mokytojui Stasiui. Mokytojo paklaustas, kaip priklauso tyrimo rezultatai nuo svyruoklės pradinio atlenkimo kampo, Jonas to negalėjo atsakyti, tad su visais turimais tyrimo rezultatais spruko namo tęsti tyrimo ir kažkodėl nebeapsirodė.

Pakartokite Jono tyrimą, pateikite savo nuotrauką šalia eksperimentinės įrangos, tyrimo rezultatus ir jų analizę. Tad kokią informaciją dabar gali slėpti Jonas?

*Užduotį parengė Vilniaus universiteto Taikomųjų mokslų instituto direktoriaus pavaduotojas, Vilniaus universiteto Fizikos fakulteto Puslaidininkių fizikos katedros docentas, mokyklos „Fizikos olimpas“ direktorius, jos steigėjų tarybos narys ir dėstytojas doc. dr. Stasys Tamošiūnas.*

▲ Šis tekstas svetainėje [www.olimpas.lt](http://www.olimpas.lt) nuolat skelbiamas nuo 2014 07 28.

**Užduoties aiškinamasis sprendimas / FT8-3 ▼**

Duota: Jono įrangos, kurioje  $l = 1$  m;  $n = 5$ ;  $l_1 = 20$  cm = 0,2m, aprašas.  $g = 9,8$  m/s<sup>2</sup>.

Reikia: pasigaminti tokią įrangą, nusifotografuoti šalia jos, pakartoti tyrimą, matuojant svyravimų periodą  $T$  ir dar ištirti jo priklausomybę nuo pradinio svyruoklės atlenkimo kampo  $\alpha$ .

Rasti:  $T(n), T(\alpha)$ .

Jonas neperdavė savo nuotraukos šalia eksperimentinės įrangos ir tyrimo rezultatų, todėl šios užduoties aiškinamajame sprendime yra pateikiamos tik bendros tyrimo metodikos detalės ir gautų eksperimento rezultatų dalis.

Jei įkalta tik pirmoji vinis, tai mažiems atsilenkimo nuo pusiausvyros padėties kampams lengvas netąsus siūlas su pakabintu mažu (spindulys  $r \ll l$ ) rutuliuku gali atitikti matematinę svyruoklę, kurios svyravimų periodas

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (1)$$

čia  $g$  - laisvojo kritimo pagreitis, kuris pateikiamose sprendimui fizikos užduotyse konkrečiai vietai dažnai būna duotas kaip žinomas dydis arba jį galima rasti iš (1) išmatavus žinomo ilgio  $l$  svyruoklės svyravimų periodą  $T_1$ .

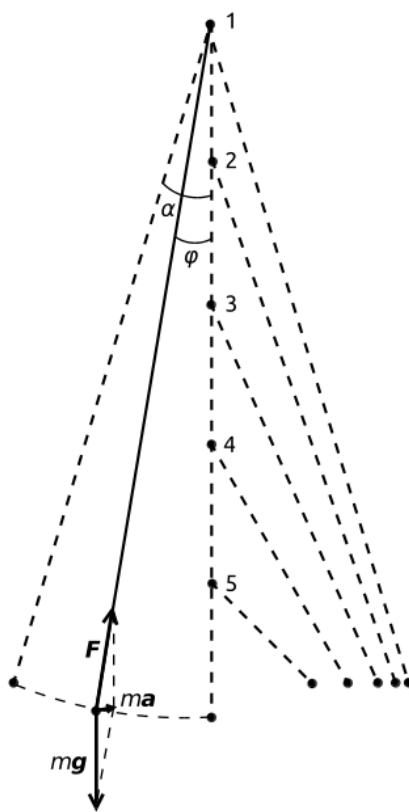
Jei įkalta antroji vinis, tai pusę svyravimų periodo sudarytų laiko tarpas  $0,5T_1$  ir dar pusė sutrumpintos dėl siūlo užkibimo už jos ilgio  $l-l_1$  svyruoklės periodo:

$$T_2 = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} + \pi\sqrt{\frac{l-l_1}{g}}, \quad (2)$$

o bendresniu atveju svyravimų periodo priklausomybė nuo įkaltų vinių skaičiaus  $n$  gali būti pateikta kaip mažėjanti didinant  $n$  funkcija:

$$T_n = \frac{\pi}{\sqrt{g}} \left[ \sqrt{l} + \sqrt{l-(n-1)l_1} \right]. \quad (3)$$

Atlenkus svyruoklę nuo pusiausvyros padėties tam tikru kampu  $\alpha$  ir paleidus be pradinio greičio, masės  $m$  rutuliukas greitėja. Jei nebūtų oro pasipriešinimo judėjimui, tai gravitaciniame lauke rutuliuką veikiant sunkio jėgai  $m\vec{g}$  mechaninė energija  $E_0$  nekistų – ji iš potencinės pradinėje padėtyje virstų į kinetinę, kuri būtų didžiausia rutuliukui praskriejant pro žemiausią padėtį. Ji nekinta ir dėl siūlo tamprumo jėgos  $\vec{F}$  poveikio (1 pav.), ypač kai siūlas yra palyginti netąsus (didelis tamprumo koeficientas), nes ši jėga statmena greičiui ir keičia tik rutuliuko judėjimo kryptį.



Pagal mechaninės energijos tvermės dėsnį

$$\frac{1}{2}I\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + mgl(1 - \cos\varphi) = E_0, \quad (4)$$

kur  $I = ml^2$  yra inercijos momentas su pirmąja vinimi sutampančios sukimosi ašies atžvilgiu, o  $\varphi$  - atsilenkimo kampas. Kampinis greitis  $d\varphi/dt$  lygus nuliui, kai atsilenkimo kampas  $\varphi = \alpha$ . Tada  $E_0 = mgl(1 - \cos\alpha)$  ir įstatę tai į (4) lygtį gaunama

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{2g(\cos\varphi - \cos\alpha)}{l}}. \quad (5)$$

Laiko tarpas, per kurį įvyksta ketvirtis pilno svyravimo, gali būti randamas integruojant palyginti sudėtingą funkciją:

$$\frac{T}{4} = \int_0^{T/4} dt = \sqrt{\frac{l}{g_0}} \int_0^{\alpha} \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos \alpha)}}. \quad (6)$$

Reikia pažymėti, kad mažiems atsilenkimo kampams ( $\alpha \leq 2^0$ )

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \quad (7)$$

o mažus kampus matuojant radianais galioja sąryšis  $\sin(\alpha/2) \approx \alpha/2$ , tada iš (6) gaunamas integravimo rezultatas atitinka periodo (1) formulę.

Kai atlenkimo kampai  $\varphi$  yra didesni, tai svyravimų periodas randamas vėl pasinaudojus taip vadinamu pirmos eilės elipsiniu integralu, o integravimo rezultatas yra laipsninė eilutė:

$$T = 2 \sqrt{\frac{l}{g_0}} \int_0^{\alpha} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \dots \right], \quad (8)$$

pagal kurią matyti, kad didėjant pradinio atsilenkimo kampui  $\alpha$  svyravimų periodas irgi didėja, o tam didžiausią įtaką turi antrasis laipsninės eilutės narys ( $\alpha < 90^0$ ,  $\sin^2 \alpha/2 < 0,5$ ).

Čia reikia pažymėti, kad rutuliuko grįžtamieji svyravimai jį veikiant sunkio ir siūlo tamprumo jėgoms yra įmanomi esant ne bet tokiam siūlo pradiniam atlenkimo kampui  $\alpha$ . Šis kampas gali siekti  $\alpha_1 = 90^0$  įkalus tik pakabos vinį. Įrašę tokią kampo vertę į (8) formulės laužtinius skliaustus rastume, kad svyravimų periodas padidėtų apie  $1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{9}{64} \cdot \frac{1}{4} \approx 1,16$  kartų

palyginus su jo verte itin mažų atlenkimo kampų atveju. Suprantama, kad didelių kampų atveju svyravimų periodą dar pailgintų ir didesnis oro pasipriešinimo greitesniam judėjimui poveikis.

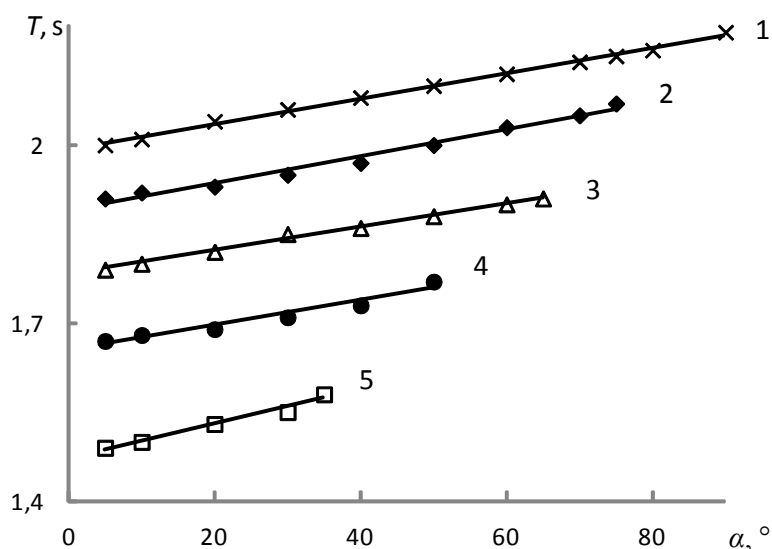
Įkalus antrą vinį ir svyrrokulei užkliuvus už jos, paleistam be pradinio greičio rutuliukui, siekiant išsaugoti svyravimams reikalingą tamprumo jėgos buvimą, pagal mechaninės energijos tvermės dėsnį neleistina pakilti aukščiau pradinio paleidimo lygio, o tuo pačiu ir tos vinies lygio, todėl didžiausias pradinis atlenkimo kampas gali būti randamas nusibraižius ir pažiūrėjus į statųjį trikampį, kurio statinis prie to kampo yra  $l_1$ , o įžambinė yra  $l$ :

$$\alpha_2 = \arccos \frac{l_1}{l}; \quad \alpha_2 = \arccos 0,2 \approx 79^0. \quad (9)$$

Bendresniu atveju bet kuriam panaudotų vinių skaičiui  $n$  didžiausias pradinis kampas

$$\alpha_n = \arccos \frac{(n-1)l_1}{l}. \quad (10)$$

Į tas priklausomas nuo įkaltų vinių skaičiaus didžiausių pradinio atlenkimo kampų vertes eksperimente būtina atsižvelgti, jei tiriame grįžtamųjų harmoninių svyravimų periodą, o ne laiko intervalus, kurių dalį sudarytų rutuliuko kritimas veikiant tik sunkio jėgai ar net nebesitęstų pasikartojantys svyravimai siūlui apsvyniojus apie vinis, ypač žemiau įkaltas.



2 pav. yra pateiktos eksperimentinės svyravimų periodo priklausomybės nuo svyruoklės pradinio atlenkimo kampo, kurios patvirtina jo didėjimą didinant tą kampą iki ribos, teoriškai apibrėžtos (10) formule, bei mažėjimą įkalus vinis žemiau pakabos. Jos nebūtinai yra tiesės – eksperimentiniai taškai yra įvairiai išsibarstę, tad per juos nubrėžtos tiesės skirtos daugiau akcentuoti tik svyravimų periodo didėjimo tendenciją. Kreivių numeracija atitinka įkaltų vinių skaičių  $n$ , o tuo pačiu ir atstumus nuo pakabos (nuo pirmosios vinies), išreiškiamus sąryšiu  $(n-1)l_1$ .

*Užduoties aiškinamąjį sprendimą pateikė jos autorius doc. dr. Stasys Tamošiūnas.*

▲ Šis tekstas svetainėje [www.olimpas.lt](http://www.olimpas.lt) nuolat skelbiamas nuo 2015 02 09.

### **Turnyro dalyvių sprendimų aptarimas / FT8-3 ▼**

Užduotį sprendė apie pusę dalyvavimą turnyre pradėjusių dalyvių. Nors, kaip ir anksčiau, daugeliui sprendusiųjų bėdų sukėlė sprendimų pateikimas kompiuteriu, bet visgi čia svarbiausia vertinant sprendimus buvo ne tai, o turnyro dalyvių ryžtas eksperimentuoti namų sąlygomis, patvirtinant įrangos parengimą ir bandymų atlikimą nuotraukomis. Už tai daugiausia balų buvo skirta vertinant sprendimus. Turnyro dalyviai eksperimentui su vinimis naudojo prie sienų stačiai pritvirtintas medines lentas, tame tarpe nepagailint pažeidimo dėl vinių įkalimo ir turimų patalpų puošiančių sienas dailylenčių bei durų staktų. Vienas turnyro dalyvis vietoje medinės lentos vinims įkalti pasinaudojo metaliniu laboratoriniu stovu su prie jo įtaisytomis vinių laikikliais. Pasitaikė ir toks turnyro dalyvis, kuris visai nekreipė dėmesio į tai, kaip svyravimų periodą teisingai nustatinėjo Jonas, padalydamas keturių pilnų svyravimų trukmę iš keturių, o tyrė keturių svyravimų trukmės priklausomybes nuo vėliau įkaltų vinių atstumo iki pirmosios įkaltos vinies. Radosi ir toks turnyro dalyvis, kuris laikė, kad įkaltos vinies atstumas iki pakabos yra ne kas kita, kaip atstumas nuo tos vinies iki rutuliuko.

Svyravimų periodo priklausomybės nuo pradinio atlenkimo kampo tyrimas yra šiek tiek nestandartinis, nes pagal mokyklų bendrojo mokymo programą žavimasi matematine svyruokle ir kitaip nenagrinėjama – tikima tuo, kad periodas yra tiesiai proporcingas kvadratinei šakniai iš svyruoklės ilgio ir atvirkščiai proporcingas kvadratinei šakniai iš kūnų laisvojo kritimo pagreičio. Gal todėl vienas turnyro dalyvis iškart teigė, kad svyravimų periodas neturi priklausyti nuo atlenkimo iš pusiausvyros padėties kampo, todėl tokios priklausomybės net nesiėmė eksperimentiškai tirti. Visgi tirti verta - kaip parodė kitų turnyro dalyvių atlikto eksperimento rezultatai, svyravimų periodas padidėja didinant tą kampą, ir beveik visų buvo tai buvo siejama

ne su svyruoklės modeliu dideliems kampams pagal (8), o su didesniu stabdomuoju oro pasipriešinimo jėgų poveikiu, kai didesniu kampu atlenkus svyruoklę yra ir didesni judėjimo greičiai, o tuo pačiu ir didesnis stabdymas.

Tad kokią informaciją gali slėpti Jonas?

Pirmiausia, ta informacija yra labai svarbi dėl unikalių eksperimento duomenų, būtent mokinio gautų tiriant svyruoklės svyravimų periodo priklausomybę nuo įkaltų vinių skaičiaus, deja, išsineštų jam pasprukus namo. Ar tiek jau daug mes turime žmonių, kurie besimokydami ryžtųsi patys viską pabandyti, o ne tik išbaigtų formulių lauktų? Antra, kaip jau mums paaiškėjo, svyravimų periodo priklausomybės nuo svyruoklės pradinio atlenkimo kampo tyrimas yra žymiai sudėtingesnis bent jau pradinių eksperimento sąlygų įvertinimo prasme, kai reikia pasirinkti ne bet kokią pradinį atlenkimo kampą. Gal jam atrodė, kad šioje eksperimento dalyje gautus rezultatus bus sunkoka paaiškinti? Vieno turnyro dalyvio nuomonė griežta - gal Jonas tik pasigyrė fizikos mokytojui pats pasigaminęs įrangą tokiam eksperimentui, o svyravimų periodo priklausomybę nuo vinių skaičiaus apskaičiavo teoriškai, tuo tarpu jam teoriškai išvesti periodo priklausomybę nuo pradinio atlenkimo kampo galėjo būti itin sudėtinga, ypač netikint, kad turi priklausyti, tad ir nebepasirodė.

*Užduoties sprendimų aptarimą parengė jos autorius doc. dr. Stasys Tamošiūnas.*

▲ Šis tekstas svetainėje [www.olimpas.lt](http://www.olimpas.lt) nuolat skelbiamas nuo 2015 02 09.

#### ***Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelė / FT8-3 ▼***

<b>Nr.</b>	<b>Sprendimų vertinimo kriterijus</b>	<b>Vertė balais</b>
1	Jono eksperimento pakartojimas ir rezultatų pateikimas	5
2	Eksperimento atlikimo patvirtinimas nuotraukoje	2
3	Svyravimų periodo priklausomybės nuo atlenkimo kampo nustatymas	2
4	Ribinio atlenkimo kampo įvertinimas	1
5	Pateikta ne pagal reikalavimus	-1
6	Netikslumai (kiekvienam iš kriterijų Nr.1-4)	iki (-1)
Didžiausias galimas sprendimo įvertinimas		10

*Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelę parengė užduoties autorius doc. dr. Stasys Tamošiūnas.*

▲ Šis tekstas svetainėje [www.olimpas.lt](http://www.olimpas.lt) nuolat skelbiamas nuo 2015 02 09.