XXXI TARPTAUTINĖ FIZIKOS OLIMPIADA
2000 m. liepos 8–16 d., Leicester, Anglija

Teorinė užduotis 1

A. Masės m šuolininkas prisitvirtinęs prie ilgio L tamprios juostos galo, kurios kitas galas pritvirtintas prie aukšto tilto. Šuolininkas žengia nuo tilto ir krinta žemyn be pradinio greičio ir nepasiekdamas žemės. Juostos tamprumo koeficientas k, laisvojo kritimo pagreitis g. Šuolininką laikome materialiuoju tašku, juostos masės ir oro pasipriešinimo nepaisome, juostai išsitempiant galioja Huko dėsnis. Gauti išraiškas

(a) atstumui y, kurį nukris šuolininkas iki pirmo sustojimo.
(b) šuolininko maksimalų greitį v krintant.
(c) šuolininko kritimo laiką t iki pirmo sustojimo.

B. Šiluminė mašina veikia imdama šilumą iš vieno kūno ir atiduodama kitam. Kūnų masės m ir savitosios šilumos c vienodos, pradinės temperatūros atitinkamai T_A ir T_B ($T_A > T_B$), proceso metu nevyksta joks fazinis virsmas.

(a) išreikškite galutinę temperatūrą T_0, jei šiluminė mašina atliks teoriškai maksimalų galimą mechaninį darbą.
(b) gaukite to maksimalaus darbo išraišką.
(c) Šiluminė mašina dirba naudodama du vandens rezervuarus 2,5 m² talpos kiekvienas. Vandens temperatūra viename rezervuare 350 K, kitame 300 K. Vandens savitoji šiluma $4{,}19 \cdot 10^3$ J kg^{-1}K^{-1}, jo tankis $1{,}00 \cdot 10^3$ kg m^{-3}. Gaukite maksimalų mechaninį darbą, kurį gali atlikti šiluminė mašina.

C. Laikome, kad formuojantis Žemei buvo izotopai ^{238}U ir ^{235}U, bet nebuvo jų skilimo produktų. Izotopo ^{238}U pusėjimo trukmė $4{,}50 \cdot 10^9$ metų, stabilus galutinis branduolys ^{206}Pb, o tarpinių skilimo produktų pusėjimo laikai žymiai mažesni, ir į juos neatsižvelgiame. Panašiai ^{235}U virsta ^{207}Pb, pusėjimo trukmė $0{,}710 \cdot 10^9$ metų. Pagal tą skilimą nustatomas Žemės amžius T.

(a) išreikškite švino atomų skaičių ^{206}n po laiko t per esamą urano atomų skaičių ^{238}N ir jo pusėjimo trukmę (galite laiko vienetu imti 10^9 metų).
(b) išreikškite švino atomų skaičių ^{207}n po laiko t per esamą urano atomų skaičių ^{235}N ir jo pusėjimo trukmę.
(c) urano ir švino rūdos mišinyje masės spektrine analize gautas izotopų ^{204}Pb, ^{206}Pb ir ^{207}Pb atomų skaičių santykis 1,00:29,6:22,6. ^{204}Pb nėra radioaktyvaus skilimo produktas ir naudojamas palyginimui. Švino rūdoje izotopų ^{204}Pb, ^{206}Pb ir ^{207}Pb atomų skaičių santykis 1,00:17,9:15,5. Duota, kad $^{238}N{:}^{235}N=137{:}1$. Gaukite lygtį Žemės amžiui T skaičiuoti.
(d) tardami, kad T yra žymiai didesnis už urano izotopų pusėjimo laikus, gaukite apytikslę T vertę.
(e) ta apytikslė vertė iš tikrųjų nėra žymiai didesnė už minėtas pusėjimo trukmes, bet gali būti panaudota tikslesnei T vertei gauti. Gaukite T vertę 2 % tikslumu.

D. Krūvis Q tolygiai pasiskirstęs vakuume radiuso R sferos tūryje.

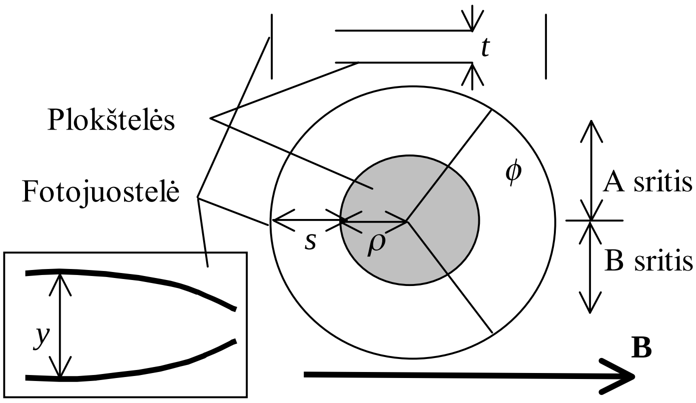
(a) gaukite elektrinio lauko stiprio išraišką per atstumą nuo sferos centro r esant rbR ir $r>R$.
(b) gaukite pilnos elektrinės energijos išraišką pateiktam krūvio pasiskirstymui.

E. Apvalus plonos varinės vielos žiedas sukasi apie vertikalų skersmenį tam tikroje vietoje Žemės magnetiniame lauke. Žemės magnetinio lauko indukcija toje vietoje yra 44,5 μT ir nukreipta 64° kampu žemiau horizonto. Vario tankis $8{,}90 \cdot 10^3$ kg m^{-3}, jo savitoji varža $1{,}70 \cdot 10^{-8}$ Ω m. Apskaičiuokite, per kiek laiko žiedo sukimosi greitis dvigubai sumažės. Tas laikas daug didesnis už vieno apsisukimo laiką. Į trintį, oro pasipriešinimą ir saviindukcijos pasireiškimą neatsižvelgiame.

Teorinė užduotis 2

(a) Katodinis vamzdelis, turintis elektroninę patranką ir ekraną, patalpintas į pastovų homogeninį magnetinį lauką, kurio indukcija **B** nukreipta lygiagrečiai elektroninės patrankos ašiai. Elektroninė patranka sukuria elektronų pluoštelį, besiskleidžiantį 5° kampu nuo patrankos ašies. Bendrai ekrane susidaro išplitusi dėmė, bet tam tikroms **B** vertėms dėmė sufokusuojama į mažą tašką. Laikydami, kad elektrono judėjimo kryptis išlekiant iš patrankos sudaro kampą β su patrankos ašimi (0bβb5°), išreikškite elektrono krūvio ir masės santykį e/m per tokius dydžius: magnetinio lauko mažiausią indukciją B, kuriai esant pluoštelis sufokusuojamas į tašką; elektronus pagreitinantį potencialą V (V<2 kV); atstumą tarp patrankos ir ekrano D.

(b) Kitas būdas krūvio ir masės santykiui gauti. Įrenginys pateiktas pav. Indukcijos **B** magnetiniame lauke paralpintos dvi apskritos žalvarinės spindulio ρ plokštelės, tarp kurių yra labai mažas tarpelis t. Tarp plokštelių palaikomas potencialų skirtumas V. Plokštelės tarpusavyje lygiagrečios ir bendraašės, o jų ašis statmena **B**. Bendraašio su plokštelėmis spindulio ρ+s cilindro, vidinis paviršius padengtas fotojuostele. Visas įrenginys yra vakuume. Atstumas t yra daug mažesnis ir už ρ, ir už s.



Taškinis β dalelių šaltinis, skleidžiantis β daleles tam tikrų greičių diapazone visomis kryptimis, patalpintas viduryje tarp plokštelių centrų, ir su ta pačia fotojuostele bandymas pakartojamas trimis skirtingomis sąlygomis: pirma, kai B=0 ir V=0, antra, kai B=B_0 ir V=V_0, trečia, kai B=–B_0 ir V=–V_0, čia B_0 ir V_0 yra teigiamos konstantos. Viršutinės plokštelės krūvis teigiamas, kai V>0, o magnetinio lauko indukcija nukreipta pav. nurodyta kryptimi esant B>0. Šioje dalyje laikome, kad plyšys labai mažas.

Dvi fotojuostelės sritys pažymėtos A ir B. pav. pateikta išryškintos fotojuostelės dalis. Kuriai sričiai (A ar B) priklauso ta dalis? Pagrįskite atsakymą nurodydami elektroną veikiančių jėgų kryptis.

(c) Mikroskopu išmatuotas atstumas tarp linijų fotojuostelėje (y), atitinkantis skirtingus kampus ϕ (2.5 pav.). Rezultatai pateikti lentelėje.

Kampai, laipsniai	ϕ	90	60	50	40	30	23
Atstumas, mm	y	17,4	12,7	9,7	6,4	3,3	Pėdsako galas

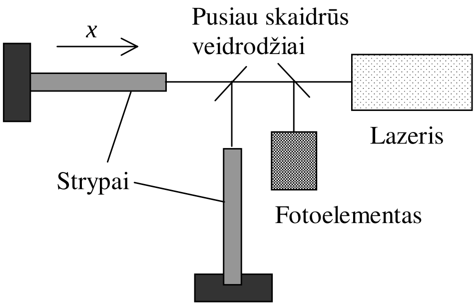
Sistemos parametrų vertės tokios: B_0=6,91 mT, V_0=580 V, t=0,80 mm, s=41,0 mm. Šviesos greitis vakuume 3,00· 10^8 m s^{-1}, elektrono rimties masė 9,11· 10^{-31} kg.

Nustatykite maksimalią stebimų β dalelių energiją.

(d) Panaudodami praeitoje dalyje gautus rezultatus apskaičiuokite elektrono krūvio ir rimties masės santykį. Tai turi būti padaryta nubrėžus atitinkamą grafiką. Analitiškai išreikškite dydžius, atidedamus ant ašių. Jūsų gautas elektrono krūvio ir masės santykis gali nesutapti su žinoma verte dėl sisteminės stebėjimų paklaidos.

Teorinė užduotis 3

Gravitacinės bangos ir gravitacijos poveikis šviesai



A. Iš kosmoso ateinančios gravitacinės bangos sunkiai pastebimos. Prie žemės paviršiaus galėtų kilti apie 10^{-19} N kg^{-1} dydžio gravitacinio lauko stiprio fluktuacijos sprogus tolimai supernovai.

Gravitacinių bangų detektorių (pateiktą pav.) sudaro du metaliniai strypai po 1 m ilgio, orientuoti vienas kitam statmenai. Kiekvieno strypo vienas galas veidrodinis, kitas standžiai įtvirtintas. Vieno strypo padėtis parinkta taip, kad fotoelementas registruotų minimalų signalą. Strypai paveikiami trumpu pjezoelektrinio daviklio impulsu, ir laisvieji strypų galai virpa išilgai amplitude Δx_t:

$$\Delta x_t = ae^{-\mu t}\cos(\omega t + \phi),$$ čia a, μ, ω ir ϕ – konstantos.

(a) Nustatykite μ, kai amplitudė sumažėja 20 % per 50 s.

(b) Nustatykite ω, kai strypai pagaminti iš aliuminio, kurio tankis (ρ) 2700 kg m^{-3}, o Jungo modulis (E) 7,1· 10^{10} Pa.

(c) Nėra galimybės pagaminti strypus tiksliai to paties ilgio, todėl fotoelemento signalui gaunama 0,005 Hz dažnio muša. Koks yra strypų ilgio skirtumas?

(d) Išreikškite strypo ilgio pokytį Δl, sukeltą laisvojo kritimo pagreičio pokyčio Δg, per laisvojo kritimo pagreitį g, strypo ilgį l ir kitas strypo medžiagos konstantas.

(e) Lazeris spinduliuoja 656 nm bangos ilgio šviesą. Jei minimalus dar išmatuojamas interferencinės linijos pokytis atitinka 10^{-4} lazerio bangos ilgio, koks turi būti minimalus strypo ilgis, kad tokia sistema pastebėtų g pokytį 10^{-19} N kg^{-1}?

B. Ši dalis susieta su gravitacinio lauko poveikiu šviesos sklidimui erdvėje.

(a) Iš Saulės (masė M, radiusas R) paviršiaus išspinduliuotas fotonas patiria raudonąjį poslinkį. Panaudodami Niutono gravitacijos teoriją parodykite, kad dideliu nuotoliu nutolusio fotono dažnis sumažėja (patyria raudonąjį poslinkį) daugikliu ($1–GM/Rc^2$).

(b) Fotono dažnio mažėjimas ekvivalentiškas jo periodo didėjimui ar, laikant fotoną laiko standartu, laiko ilgėjimu. Be to, galima parodyti, kad laiko pailgėjimas susietas su atstumo sumažėjimu tokiu pat daugikliu.

Panagrinėkime kaip tai pasireiškia fotonui judant arti Saulės. Apibrėžkime efektyvųjį lūžio rodiklį n_r atstumu r nuo Saulės centro:

$$n_r = \frac{c}{c'_r},$$

čia c šviesos greitis toli nuo Saulės ($r \to \infty$), c'_r – šviesos greitis, išmatuotas koordinačių sistemoje atstumu r nuo Saulės centro. Parodykite, kad n_r galima išreikšti formule $n_r = 1 + \dfrac{\alpha GM}{rc^2}$, esant mažai vertei reiškinio GM/rc^2, ir nustatykite konstantą α.

(c) Panaudodami n_r išraišką apskaičiuokite šviesos spindulio nukrypimo nuo tiesės kampą, kai spindulys praeina palei Saulės kraštą.

Gravitacinė konstanta G=6,67· 10^{-11} N m^2 kg^{-2},
Saulės masė M=1,99· 10^{30} kg,
Saulės radiusas R=6,95· 10^8 m,
Šviesos greitis c=3,00· 10^8 m s^{-1}.

Galite panaudoti tokį integralą: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)^{3/2}} = \frac{2}{a^2}$.

Eksperimentinė užduotis 1

SPEKTROMETRAS IŠ KOMPAKTINIO DISKO

Tikslas – sukurti grafiką, parodantį, kaip fotovaržo laidumas priklauso nuo šviesos bangos ilgio matomoje spektro dalyje.

Bandymą sudaro penkios dalys.

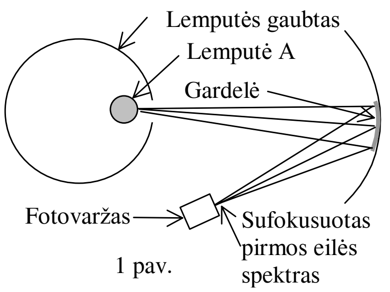
- Naudojant įgaubtą atspindinčią gardelę (pagamintą iš kompaktinio disko juostelės) sudaryti sufokusuotą lemputės A (12 V, 50 W, volframo siūlelis) šviesos pirmos eilės spektrą.
- Išmatuoti ir sukurti fotovaržo laidumo priklausomybės nuo bangos ilgio grafiką skenuojant tą pirmos eilės spektrą.
- Parodyti, kad lemputės A siūlelis spinduliuoja maždaug kaip idealus juodasis kūnas.
- Rasti lemputės A siūlelio temperatūrą, kai ji prijungta prie 12 V šaltinio.
- Sukoreguoti fotovaržo laidumo priklausomybės nuo bangos ilgio grafiką atsižvelgiant į energijos pasiskirstymą lemputės A spinduliavimo spektre.

Darbo tvarka

(a) 1 pav. pateiktoje įrangoje lemputės A šviesa krinta statmenai į kreivinę gardelę, o fotovaržas talpinamas pirmos eilės spektro sufokusavimo vietoje. Perstumiant fotovaržą išilgai spektro stebima, kaip jo varža (matuojama multimetru X) kinta priklausomai nuo vietos.

(b) (i) Matuojame ir užrašome fotovaržo varžą R skirtingose pirmos eilės spektro vietose.
(ii) Sudarome fotovaržo laidumo G priklausomybės nuo bangos ilgio λ grafiką.

Pastaba. Kampasθ tarp bangos ilgio λ šviesos sklidimo krypties pirmos eilės spektre ir atspindėtos baltos šviesos išreiškiamas formule $\sin\theta = \lambda/d$, čia d – atstumas tarp rėžių gardelėje (gardelės konstanta).

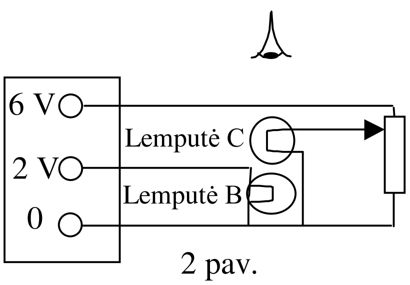


1 pav.

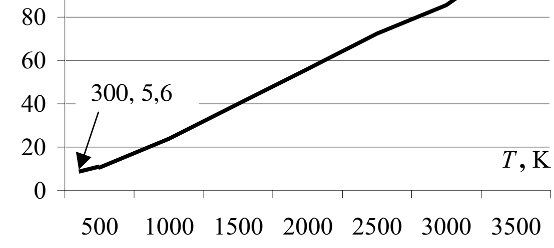
Sudarytas grafikas tiksliai neduoda fotovaržo jautrumo skirtingo bangos ilgio šviesai, nes neatsižvelgta į lemputės A spinduliavimo charakteristikas. Tos charakteristikos yra gaunamos dalyse (c) ir (d), o patikslinta kreivė sudaryta dalyje (e).

(c) Jei 50 W lemputės siūlelis spinduliuoja kaip juodasis kūnas, galima parodyti, kad potencialų skirtumas jo galuose su juo tekančios elektros srovės stipriu susieti išraiška $V^3 = CI^5$, čia C – konstanta. Išmatuokite lemputei A atitinkamas V ir I vertes.
(i) Užrašykite išmatuotas vertes.
(ii) Sudarykite tinkamą grafiką parodyti, kad siūlelis spinduliuoja kaip juodasis kūnas.

(d) Gautam (b) (ii) grafikui sukoreguoti reikia žinoti volframo siūlelio temperatūrą lemputėje A spektrinių matavimų metu. Tai galima rasti iš volframo varžos kitimo priklausomai nuo temperatūros.



2 pav.



Jums pateiktas volframo varžos (μΩ cm) priklausomybės nuo temperatūros (K) grafikas. Jei lemputės A siūlelio varžą surastume žinomoje temperatūroje ir prijungus prie 12 V šaltinio, galėtume surasti ir plaukelio temperatūrą. Tačiau siūlelio varža kambario temperatūroje perdaug maža pakankamai tiksliai išmatuoti turimais prietaisais. Jums duota mažesnė lemputė C, kurios varža didesnė ir gali būti išmatuota kambario temperatūroje, o taip pat su ja sumontuota ant pagrindo ir sujungta pagal pateiktą schemą (2 pav.) lemputė B, identiška lemputei A. Lempute C pasinaudojame tokiu būdu.

(i) Išmatuojame lemputės C varžą kambario temperatūroje (300 K).

(ii) Panaudodami 2 pav. pateiktą schemą palyginame lempučių B ir C siūlelius. Kintamu varžu keisdami srovės stiprį lemputėje C pasiekiame, kad persiklojantys lempučių B ir C siūleliai būtų vienodo šviesumo, t.y., vienodos temperatūros. Išmatuojame lempučių B ir C varžas esant tai temperatūrai.

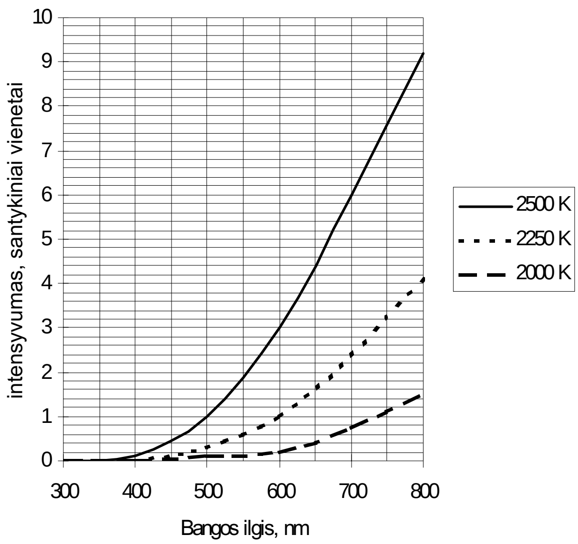
(iii) Panaudodami varžos priklausomybės nuo temperatūros grafiką nustatome B ir C lempučių siūlelių temperatūrą *T'* matavimo metu.

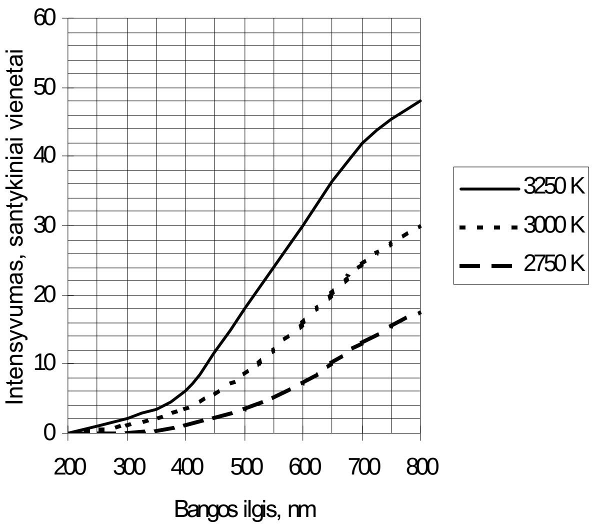
(iv) Išmatuojame lemputės A varžą *R* ją prijungus prie 12 V šaltinio.

(v) Nustatome lemputės A siūlelio temperatūrą T prijungus 12 V šaltinį palygindami jos varžą esant temperatūrai *T'* su *R*.

Jums pateikti juodojo kūno santykinio spinduliavimo intensyvumo grafikai (Planko kreivės) esant 2000 K, 2250 K, 2500 K, 2750 K, 3000 K ir 3250 K temperatūrai.

(e) Panaudodami pateiktus grafikus ir (d) (v) dalies rezultatą patikslinkite fotovaržo laidumo priklausomybės nuo bangos ilgio grafiką. Laikykite, kad fotovaržo laidumas tiesiškai priklauso nuo šviesos intensyvumo visiems bangų ilgiams (tai tinka esant mažiems šviesos intensyvumams). Taip pat laikome, kad gardelė sklaido šviesą vienodai visose pirmosios eilės spektro dalyse.





Magnetinis ritiniukas

Tikslas – ištirti ritiniuką veikiančias jėgas jam slystant nuožulniąja plokštuma.

Laiko matavimas

Po nuožulniąja plokštuma yra jutikliai, viršutinis įjungia multimetrą, kai virš jo praslenka ritiniukas, apatinis – išjungia. Taigi, multimetras parodo, per kiek laiko ritiniukas nuslenka nuo viršutinio jutiklio iki apatinio.

Apibrėžimai

Slystantį nuožulniąja plokštuma kūną veikia stabdančioji jėga F. Ją sudaro trinties jėga $F_t=\mu N$, nepriklausanti nuo greičio, ir magnetinės sąveikos jėga F_m, proporcinga ritiniuko judėjimo greičiui. Pažymime $F=F_t+F_m$, $\xi=F/N$, $\xi_{ds}=\xi\mu$.

Ritiniuko sunkis W=5,84· 10^{-2} N, atstumas tarp jutiklių po nuožulniąja plokštuma l=0,294 m.

Nuorodos

Pradžioje ištirkite ritiniuko judėjimą kokybiškai.

Suvokite fizikinius dėsningumus prieš atlikdami kiekybinius tyrimus. Kur galima panaudokite grafinius atvaizdus.

Nedarykite perdaug matavimų, nes laikas ribotas.

Bandymas

Ištirkite, kaip priklauso ξ_{ds} nuo ritiniuko greičio keisdami nuožulniosios plokštumos pasvirimo kampą θ.

Gaukite analizines išraiškas, paaiškinančias jūsų matavimų rezultatus ir grafikus.

Pasiūlykite kokybinį modelį jūsų rezultatams paaiškinti. Panaudokite gautus rezultatus modeliui pagrįsti.

Sprendimai

A. Šuolininkas sustoja, kai jo potencinės energijos pokytis tampa lygus juostos stangrios deformacijos energijai:

$$mgy = k(y-L)^2/2.$$

Gautos kvadratinės lygties $ky^2 - 2y(kL+mg) + kL^2 = 0$ sprendiniai yra

$$y = \frac{kL + mg \pm \sqrt{2mgkL + m^2g^2}}{k}.$$

Kadangi turime teigiamas skirtingas šaknis, o jų sandauga lygi L^2, tai viena yra didesnė už L, o kita mažesnė. Fizikinis sprendinys yra didesnioji šaknis.

(b) Maksimalus greitis pasiekiamas, kai pagreitis tampa lygus nuliui, t.y., kai juostos įtempimo jėga tampa lygi sunkio jėgai: $mg=kx$. Tuo momentu energijos tvermės dėsnis duoda

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = mg(L+x).$$

Įrašę x gauname ieškomąjį greitį

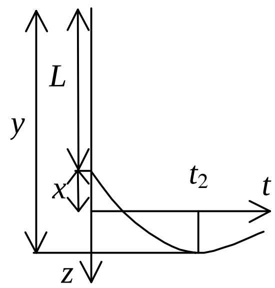
$$v = \sqrt{2gL + mg^2/k}\ .$$

(c) Pradžioje, kol juosta išsitiesia vertikaliai, šuolininkas krinta pagal laisvojo kūnų kritimo dėsnį atstumą L, tokio kritimo laikas

$$t_1 = \sqrt{2L/g}\ .$$

Toliau šuolininkui krintant juosta tempiasi, juostos tamprumo jėga proporcinga jos pailgėjimui, ir šuolininko judėjimas aprašomas svyravimo formule

$$z = A\sin 2\pi\frac{t+t_0}{T},$$



čia z – nuokrypis nuo pusiausvyros padėties, A – svyravimo amplitudė, T – svyravimo periodas, t_0 – konstanta, priklausanti nuo pradinės šuolininko padėties ir jo judėjimo greičio. Amplitudė $A=y-L-x$, periodas $T = 2\pi\sqrt{m/k}$. Iš pav. matyti, kad esant $t=0$, $z=-x$, o esant $t=t_2$, $z=A$. Gauname lygtis

$$-x = (y-L-x)\sin\left(t_0/\sqrt{m/k}\right),\ \ \sin\left((t_0+t_2)/\sqrt{m/k}\right) = 1,$$

kurias išsprendę gauname

$$t_2 = \sqrt{m/k}\left(\pi/2 + \arcsin\left(x/(y-L-x)\right)\right) = \sqrt{m/k}\left(\pi/2 + \arcsin\left(1/\sqrt{1+2kL/mg}\right)\right).$$

Tada ieškomasis kritimo laikas

$$t = t_1 + t_2 = \sqrt{2L/g} + \sqrt{m/k}\left(\pi/2 + \arcsin\left(1/\sqrt{1+2kL/mg}\right)\right).$$

B. a) Pažymime pirmojo kūno temperatūrą T_1, antrojo T_2. Tada per trumpą laiko tarpą atliktas darbas

$$dA = \eta dQ_1 = dQ_1 - dQ_2,\ \ \eta = (T_1 - T_2)/T_1,\ \ dQ_1 = -mcdT_1,\ \ dQ_2 = mcdT_2\ .$$

Į darbo išraišką įrašę naudingumo koeficiento ir šilumos kiekių išraiškas gauname sąryšį temperatūrų pokyčiams:

$$-\frac{dT_1}{T_1} = \frac{dT_2}{T_2}\ .$$

Procesui vykstant pirmojo kūno temperatūra mažėja, antrojo – didėja, kol jos susilygina. Tada

$$\int_{T_A}^{T_0}\left(-\frac{dT_1}{T_1}\right) = \int_{T_B}^{T_0}\frac{dT_2}{T_2},\ \ \ln\frac{T_A}{T_0} = \ln\frac{T_0}{T_B},\ \ T_0 = \sqrt{T_AT_B}\ .$$

b) Atliktas darbas

$$A = Q_1 - Q_2 = mc(T_A - T_0) - mc(T_0 - T_B) = mc\left(T_A - 2\sqrt{T_AT_B} + T_B\right) = mc\left(\sqrt{T_A} - \sqrt{T_B}\right)^2.$$

c) Iš pateiktų skaitinių verčių gauname vandens masę viename rezervuare $m=\rho V$, tada darbas

$$A = \rho Vc\left(\sqrt{T_A} - \sqrt{T_B}\right)^2,\ \ A = 1{,}00\cdot10^3\cdot2{,}5\cdot4{,}19\cdot10^3\cdot\left(\sqrt{350} - \sqrt{300}\right)^2 = 20{,}2\ \text{MJ}\ .$$

C. Sutinkamai su radioaktyvaus skilimo dėsniu praėjus laikui t ^{238}U atomų skaičius yra

$$^{238}N = {}^{238}N_0 2^{-t/\tau_{238}},$$

todėl ieškomasis švino atomų skaičius

$$^{206}n = {}^{238}N_0 - {}^{238}N = {}^{238}N\left(2^{t/4{,}50} - 1\right).$$

b) Analogiškai

$$^{207}n = {}^{235}N\left(2^{t/0,710} - 1\right).$$

c) Atėmę antrąjį santykį iš pirmojo, gauname

$$^{206}n : {}^{207}n = 11,7 : 7,1.$$

Dalindami a) dalyje gautą išraišką iš gautos b) dalyje gauname

$$^{206}n : {}^{207}n = {}^{238}N\left(2^{t/4,50} - 1\right) : {}^{235}N\left(2^{t/0,71} - 1\right),$$

imdami $t = T$, gauname

$$11,7 : 7,1 = 137\left(2^{T/4,50} - 1\right) : \left(2^{T/0,71} - 1\right).$$

d) Laikydami, kad T>>4,50· 10^9, atmetame išraiškoje vienetukus, gauname:

$$2^{1,19T} = 83,1,\; T = 5,36,\; \text{t.y.}, T = 5,36{\cdot}10^9 \text{ metų}.$$

e) Gauta vertė nėra žymiai didesnė už 4,51· 10^9 metų, bet lyginant su 0,71· 10^9 metų ji gali būti laikoma žymiai didesne, todėl vienetuką galima atmesti tik paskutiniuose c) dalies formulės skliausteliuose. Tada formulę perrašome taip:

$$2^{T/0,71} = 83,3\left(2^{T/4,50} - 1\right),\; T = \frac{0,71}{\ln 2}\ln\left(83,3\left(2^{T/4,50} - 1\right)\right).$$

Pateiktą lygtį sprendžiame iteracijų būdu: į dvejeto laipsnio rodiklį įrašome aukščiau gautą T=5,36 ir apskaičiuojame naują T vertę:

$$T = 1,02{\cdot}\ln\left(83,3\left(2^{5,36/4,50} - 1\right)\right) = 4,79.$$

Imdami naujai gautą T vertę iteraciją pakartojame, gauname T=4,60. Dar viena iteracija duoda T=4,54. Kadangi dviejų paskutinių iteracijų rezultatai skiriasi mažiau negu 2 %, paskutinį gautą skaičių ir imame atsakymu: T=4,54· 10^9 metų (tikslesnis c) dalyje gautos lygties sprendinys 4,53· 10^9 metų).

D. Krūvio tankis sferos viduje

$$\rho = Q\Big/\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right).$$

Kai $r<R$, elektrinio lauko stipris

$$E = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}.$$

Kai $r>R$, elektrinio lauko stipris

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

b) Sakykime, kad radiuso r sfera užpildyta ρ tankio elektros krūviu, jo sukurtas potencialas

$$\varphi = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\rho r^2}{3\varepsilon_0}.$$

Padidinant sferos radiusą dydžiu dr atnešamas krūvis

$$dq = 4\pi\rho r^2 dr,$$

todėl energija padidėja dydžiu

$$dE = \varphi dq = \frac{4\pi\rho^2 r^4 dr}{3\varepsilon_0}.$$

Tada visa energija, reikalinga sukurti pateiktą sąlygoje krūvio pasiskirstymą

$$E = \int_0^R dE = \int_0^R \frac{4\pi\rho^2 r^4 dr}{3\varepsilon_0} = \frac{4\pi\rho^2 R^5}{15\varepsilon_0} = \frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 R}.$$

E. Pažymime žiedo radiusą a, vielos skerspjūvio plotą A, vario tankį d, jo savitąją varžą ρ, Žemės magnetinę indukciją B, jos sudaromą su horizontu kampą θ, žiedo sukimosi kampinį greitį ω. Sukantis žiedui jį kertančio magnetinio srauto kitimą išreiškia formulė

$$\Phi = \pi a^2 B\cos\theta \sin\omega t.$$

Tas kintamas magnetinis srautas sukuria elektrovarą

$$\varepsilon = \frac{d\Phi}{dt} = \pi a^2 B\cos\theta{\cdot}\omega\cos\omega t,$$

todėl žiedu teka elektros srovė ir išsiskiria galia (šiluma)

$$P = \frac{\varepsilon^2}{R} = \frac{\pi^2 a^4 B^2 \cos^2\theta \cdot \omega \cos^2 \omega t}{2\pi a\rho / A} = \frac{\pi a^3 A B^2 \cos^2\theta \cdot \omega^2 \cos^2 \omega t}{2\rho}.$$

Energijos kiekis, išsiskyręs per vieną žiedo apsisukimą, išreiškiamas formule

$$E = \int_0^T P dt = 2\int_0^{T/2} \frac{\pi a^3 A B^2 \cos^2\theta \cdot \omega^2 \cos^2 \omega t}{2\rho} dt = \frac{\pi^2 a^3 A B^2 \cos^2\theta \cdot \omega}{2\rho}.$$

Padalinę gautą išraišką iš $T=2\pi/\omega$ gauname vidutinį energijos kiekį, išsiskyrusį per laiko vienetą. Tada per laiką dt išsiskiria energijos kiekis

$$dE = \frac{\pi a^3 A B^2 \cos^2\theta \cdot \omega^2}{4\rho} dt.$$

Panaudodami žiedo mechaninės energijos išraišką

$$E = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{m a^2 \omega^2}{4} = \frac{d\pi a^3 A \omega^2}{2},$$

išreiškiame dE ir prilyginame išsiskyrusios energijos kiekiui. Gautoje lygtyje atskiriame kintamuosius ω ir t. Gauname

$$\frac{d\omega}{\omega} = \frac{B^2 \cos^2\theta}{4\rho d} dt.$$

Integruodami gautą išrašką nuo ω iki $\omega/2$ gauname ieškomąjį laiką

$$\tau = \int_0^\tau dt = \frac{4\rho d}{B^2\cos^2\theta}\int_{\omega/2}^{\omega}\frac{d\omega}{\omega} = \frac{4\rho d \ln 2}{B^2 \cos^2\theta},$$ τ = 1,10· 10^6 s = 12 dienų 18 valandų.

Teorinė užduotis 2

a) Besiskleidžiantis elektronų pluoštelis fokusuojamas elektronams magnetiniame lauke judant spirale: padarę pilną apsisukimą elektronai susikaupia taške, esančiame ant lygiagrečios magnetiniam laukui tiesės ir einančios per jų įlėkimo į magnetinį lauką tašką. Tokio apsisukimo periodas nepriklauso nuo elektrono greičio statmenos magnetinio lauko krypčiai dedamosios didumo ir yra lygus $T=2\pi m/eB$. Per tą laiką elektronas išilgai magnetinio lauko krypties pasislenka atstumu $D = Tu\cos\beta \approx Tu = 2\pi\sqrt{2Vm/e}$. Taigi, elektrono krūvio ir masės santykis

$$\frac{e}{m} = \frac{8\pi^2 V}{B^2 D^2}.$$

b) Sutinkamai su sąlyga, tarp plokščių sukurtas elektrinis laukas elektroną veikia į viršų nukreipta jėga. A srityje magnetinis laukas elektroną veikia taip pat į viršų nukreipta jėga, todėl elektronas nukrypsta į viršų, patenka į plokštelę ir nepasiekia fotojuostelės. B srityje magnetinis laukas elektroną veikia žemyn nukreipta jėga, ir jei ta jėga yra tokio pat didumo, kaip elektrinio lauko sukurta jėga, horizontalia kryptimi judantis elektronas tarp plokštelių juda tiesiai ir pasiekia fotojuostelę. Taigi, fotojuostelės dalis paimta iš B srities.

c) Kai elektrinis ir magnetinis laukai veikia elektroną vienodo didumo jėgomis, gauname

$$eV/t = eBu\sin\phi, \quad u = V/(Bt\sin\phi).$$

Imdami mažiausią kampą ϕ=23°, gauname maksimalų elektrono greitį

u=2,69· 10^8 m/s=0,896c.

Kaip matome, elektrono greitis gana artimas šviesos greičiui. Todėl jo kinetinę energiją randame iš reliatyvistinės formulės

$$E_k = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right), \; E_k = 641\,\text{keV}.$$

d) Kai elektronas išlekia iš tarpo tarp plokštelių, elektrinis laukas jo nebeveikia, o veikiant magnetiniam laukui atsiranda vertikaliai nukreiptas pagreitis

$$a = Beu\sin\phi/\gamma m, \; \gamma = 1/\sqrt{1-u^2/c^2}.$$

Per laiką $\tau=s/u$ elektronas pasiekia fotojuostelę. Vertikalia kryptimi per tą laiką jis pasislenka atstumu $y/2 = at^2/2$. Taigi, išmatuotam atstumui y gauname išraišką

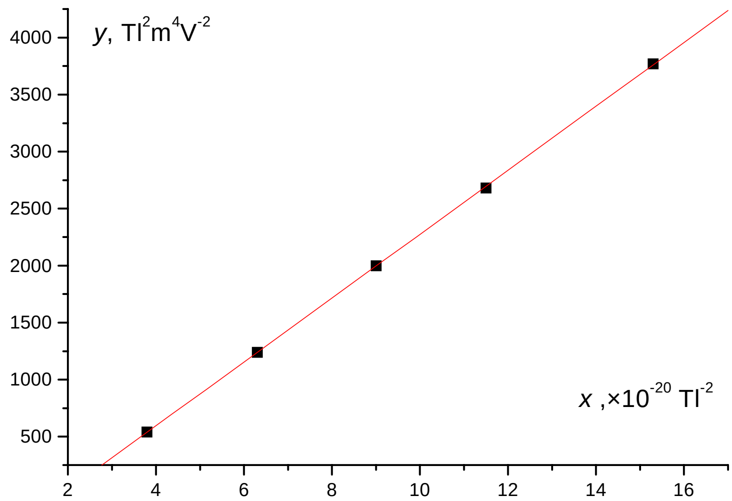
$$y = Bes^2\sin\phi/\gamma mu.$$

Panaudodami dalyje c) greičiui gautą išraišką $u = V/(Bt\sin\phi)$ eliminuojame u ir gauname

$$\left(\frac{y}{Bs\sin\phi}\right)^2 = \left(\frac{e}{m}\right)^2 \left(\frac{Bst\sin\phi}{V}\right)^2 - \left(\frac{es}{mc}\right)^2.$$

Imdami kintamaisiais $x=(Bst\sin\phi/V)^2$ ir $z=(y/Bs\sin\phi)^2$ gauname tiesės lygtį, kurios krypties koeficientas lygus $(e/m)^2$, o susikirtimo su vertikaliąja ašimi taškas $-(es/mc)^2$. Iš lentelėje pateiktų duomenų apskaičiuojame x ir z, nubrėžiame grafiką, išmatuojame gautos tiesės krypties koeficientą k ir susikirtimo su z ašimi taško koordinatę z_0 ir apskaičiuojame e/m. Gauname:

x, $\times 10^{-20}$ (Tl m^2/V)^2	15,3	11,5	9	6,3	3,8
z, Tl^{-2}	3770	2680	2000	1240	540



$k=280\times 10^{20}$ (C/kg)^2,
$e/m = 1{,}67\times 10^{11}$ C/kg,
$z_0=-527$ (C s/kg),
$e/m = 1{,}68\times 10^{11}$ C/kg.

Teorinė užduotis 3

A a) Parametrą μ gauname iš lygties $e^{-50\mu} = 0{,}8,\ \mu = 0{,}0045\,\mathrm{s}^{-1}$

b) Garso bangų sklidimo greitis išreiškiamas formule $v = \sqrt{E/\rho}$.

Strypo su vienu įtvirtintu galu ilgis esant rezonansui atitinka ¼ bangos ilgio, t. y., $\lambda=4l=4$ m. Tada $\omega = 2\pi v/\lambda = 2\pi\sqrt{E/\rho}/(4l),\ \omega = 8060\,\mathrm{s}^{-1}$.

c) Į mušos dažnio išraišką $v_m = (\omega_1 - \omega_2)/2\pi$ įrašome dažnius imdami strypų ilgius l_1 ir l_2 ir išreiškiame jų ilgių skirtumą Δl per mušos dažnį, laikydami, kad $\omega_1 \approx \omega_2 = 2\pi v$, $l_1 \approx l_2 = l >> \Delta l$. Gauname

$$\Delta l = l v_m / v = 4l^2 v_m \sqrt{\rho/E},\ \Delta l = 3{,}9\cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}.$$

d) Suskirstome strypą į n vienodo ilgio gabalėlių $\delta l = l/n$. Kai strypas laikomas vertikaliai, o jo apatinis galas įtvirtintas, i-tąjį gabalėlį veikia $(i-1)$ virš jo esančių gabalėlių sunkio jėga, todėl jo ilgis sumažėja: $\delta l_i = \delta l(1-\rho g l(i-1)/nE)$. Taigi, strypo ilgio pokytis $\delta l = \sum_{i=1}^{n}(\delta l - \delta l_i) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\rho g l^2}{n^2 E}(i-1) = \frac{\rho g l^2}{n^2 E}\cdot\frac{n(n-1)}{2}$.

Kai nŨĽ, $\delta l = \frac{\rho g l^2}{2E}$. Kadangi d$l$ tiesiai proporcinga g, tai laisvojo kritimo pagreičiui pakitus dydžiu Dg strypo ilgis pakis dydžiu $\Delta l = \frac{\rho \Delta g l^2}{2E}$.

e) Vieno strypų ilgiui pakitus dydžiu Dl atitinkamo šviesos spindulio optinis kelias pakinta dydžiu 2Dl. Ieškomąjį strypo ilgį randame iš lygties $2\Delta l = k\lambda$, įrašydami aukščiau gautą Dl išraišką ir imdami $k=10^{-4}$. Gauname

$$\frac{k\lambda}{2} = \frac{\rho\Delta g l^2}{2E},\ l = \sqrt{\frac{k\lambda E}{\rho\Delta g}},\ l = 1{,}3\cdot 10^8\ \mathrm{m}.$$

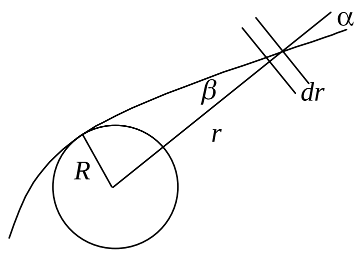
B a) Fotono, kurio masė $m=h\nu/c^2$, gravitacinė energija Saulės paviršiuje yra $E=gMm/R$. Fotonui nutolus nuo Saulės jo energija tokiu dydžiu sumažėja. Gauname $h\nu' = h\nu - gMm/R = h\nu(1-gM/Rc^2)$, $\nu' = \nu(1-gM/Rc^2)$.

b) Laisvas fotonas per laiką t nueina atstumą $x=ct$, jam atitinka virpesių skaičius $k=t\nu$, todėl $c=x\nu/k$. Saulės gravitaciniame lauke atitinkamai gauname $c'=x'\nu'/k$. Saulės gravitacinis laukas sumažina fotonui atitinkantį dažnį

$(1–gM/Rc^2)$ kartų. Sąlygoje nurodyta, kad tokiu pat daugikliu pakinta ir atstumas. Laikant fotoną laikrodžiu k imamas tas pats, todėl lūžio rodiklis $n_\gamma = \frac{c}{c'} = \frac{1}{\left(1-\gamma M/Rc^2\right)^2} \approx 1 + \frac{2\gamma M}{Rc^2}$.

Taigi, ieškomasis daugiklis $a=2$.

c) Aukščiau gauta lūžio rodiklio išraiška tinka ne tik Saulės paviršiuje, bet ir esant bet kokiam atstumui nuo Saulės centro $r>R$. Taigi, lūžio rodiklis yra vienodas ploname sferiniame sluoksnyje, koncentriniame su Saulės rutuliu, ir mažėja tolstant nuo Saulės. Praeinančio palei Saulės kraštą spindulio trajektorija pateikta pav. Pagal šviesos lūžio dėsnį gauname:



$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n(r-dr)}{n(r)}.$$

Įrašę n išraišką ir imdami $a=b+dq$ gauname

$$n(r)\sin(\beta + d\theta) = [n(r) - n'(r)dr]\sin\beta,$$

$$d\theta = -\frac{n'(r)}{n(r)}tg\beta dr.$$

Kadangi šviesos spindulys sklinda beveik tiesiai, $tg\beta = R/\sqrt{r^2-R^2}$. Be to, fotono trajektorija artėjant prie Saulės ir tolstant nuo jos yra simetriška, todėl visas nuokrypio kampas gaunamas padauginus iš 2 nuokrypio kampą, susidariusį fotonui artėjant prie Saulės. Gauname: $\theta = 2\int_\infty^R \frac{-2\gamma M/c^2r^2}{1+2\gamma M/c^2r}\cdot\frac{R}{\sqrt{r^2-R^2}}dr$

Saulės gravitacijos sąlygojamas lūžio rodiklis artimas vienetui, net prie Saulės paviršiaus jis tėra 1,000004. Todėl skaičiuojant q pirmasis daugiklis pointegrinės funkcijos vardiklyje gali būti praleistas. Pažymėję $r^2 - R^2 = x^2$, $dr = xdx/\sqrt{x^2+R^2}$, gauname

$$\theta = \frac{4\gamma MR}{c^2}\int_0^\infty \frac{dx}{\left(x^2+R^2\right)} = \frac{2\gamma MR}{c^2}\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{\left(x^2+R^2\right)} = \frac{4\gamma M}{c^2R},\ \theta = 8{,}5\cdot10^{-6}\ \text{rad.}$$

Eksperimentinės užduoties vertinimas

b) viso 3 taškai.

(i) Nustatome matomų linijų bangų ilgių pasiskirstymą – 0,3 taško.
- Išmatuojame varžą bent 7 bangos ilgio vertėms – 0,3 taško (5 ar 6 – 0,2 taško, 4 – 0,1 taško, mažiau 4 – 0 taškų).
- Laidumo verčių nustatymas – 0,1 taško.
- Matavimo tikslumas: skirtumas nuo tikslios vertės neviršija 10 % – 0,2 taško, iki 20 % 0,1 taško.

(ii) Sudarome fotovaržo laidumo G priklausomybės nuo bangos ilgio λ grafiką.
- Gaunama smailė – 0,2 taško.
- Smailės vieta (580±20) nm – 0,3 taško, 550–560 ar 600–610 nm – 0,1 taško, didesnis nukrypimas – 0 taškų.
- Pažymėti ant ašių taškai – 0,2 taško.
- Nurodytos dimensijos – 0,2 taško.
- Teisingai sudėlioti duomenų taškai – 0,2 taško.
- Tinkamai parinktas mastelis – 0,2 taško.
- Gerai nubrėžta linija – 0,2 taško.
- Pagrįstas smailės gavimas – 0,5 taško.

c) viso 2 taškai.

(i) I ir V verčių lentelės sudarymas:
- bent 4 vertės – 0,2 taško,
- 3 vertės – 0,1 taško,
- mažiau 3 verčių – 0 taškų.
- Tikslus tabuliavimas nurodant vienetus ir pažymint taškus – 0,3 taško.
- Tikslus įtampos matavimas – 0,2 taško.
- Apskaičiuotos V^3 ir I^5 logaritmų vertės – 0,2 taško.

(ii) V^3 ir I^5 proporcingumo grafikas:
- Gauta tiesė – 0,3 taško.
- Pagal krypties koeficientą (V ir I laipsnių grafike) – 0,3 taško,
- ARBA pagal susikirtimą su koordinačių ašimi (logaritmo grafike) – 0,3 taško.
- Taškai ant ašių – 0,1 taško.
- Nurodyti vienetai – 0,1 taško.

Teisingai pažymėti taškai – 0,2 taško.
Tinkamas mastelis – 0,1 taško.

(d) viso 3 taškai.

(i) Lemputės C varža esant 300 K temperatūrai (13,5±1 W) – 0,2 taško.
(ii) Lemputės C varža kai lyginama su lempute B (90±5 W) – 0,2 taško.
Lemputės B varža kai lyginama su lempute C (1,2±0,2 W) – 0,2 taško.
(iii) Lempučių B ir C plaukelių temperatūra jas lyginant – 0,8 taško.
(iv) Lemputės A varža prijungus 12 V įtampą (2,85±0,15 W) – 0,4 taško.
(v) Lemputės A siūlelio temperatūra prijungus 12 V įtampą – 1,0 taško.
(2900±600 k) – 0,2 taško.

(e) viso 2 taškai

Tinkamos Planko kreivės panaudojimas – 0,2 taško.
Pataisinio daugiklio *G* gavimas – 0,6 taško.
Tikslus lentelės sudarymas – 0,2 taško.
Tikslaus grafiko nubraižymas – 0,6 taško.
Taškai ant ašių – 0,1 taško.
Nurodyti vienetai – 0,1 taško.
Teisingai pažymėti taškai – 0,1 taško.
Tinkamai parinktas mastelis – 0,1 taško.

Magnetinis ritiniukas

Nuobaudos:
–0,01 už kiekvieną smulkią klaidą ar praleidimą,
–0,5 už kiekvieną stambesnį trūkumą.

A. Baterijos elektrovaros koreguojama atliekant kiekvieną įtampos nuskaitymą (jei koreguojama mažiau pusės verčių – 1 taškas) –2 taškai.

B. Hipotezė, kad magnetinė stabdymo jėga $F=kv$ (arba elektrovara ~v^2) – 1 taškas,
sąryšio algebrinė išraiška – 2 taškai.

C. Nemagnetinės trinties koeficiento dalies μ nustatymas.

I metodas. Randame kampą θ, kuriam esant ritiniukas slysta labai mažu pastoviu greičiu ir gauname μ=tgθ. Pažymime, kad ritiniuką reikia nežymiai pajudinti, nes priešingu atveju bus nustatytas statinės trinties koeficientas. Esant didesniam greičiui pasireikš ir magnetinis poveikis. Greičio pastovumas patikrinamas paleidžiant ritiniuką slysti iš skirtingų aukščių. m vertė gaunama tarp 0,2 ir 0,4.
Pastebėjimas, kad $\mu=\mathrm{tg}\theta_{min}$ – 1 taškas.
Greičio v nustatymas keliems (n) ξ – 1×n taškų (iki 4).
θ_{min} nustatymas – 1+1 (keliems aukščiams) taškų.
μ paklaidų nustatymas – 1 taškas.
Rezultatas 0,2÷0,4 ribose – 1 taškas.
Rezultatas 2–3 ženklų tikslumu – 1 taškas.

II metodas.
Greičio v nustatymas keliems (n) θ – 1×n taškų (iki 4).
Grafiko v priklausomybės nuo θ gavimas vienai ritiniuko pusei – 2 taškai.
μ nustatymas pagal grafiko susikirtimą su ašimi – 1 taškas.
Papildomi taškai už pakartotą bandymą su kita ritiniuko puse – 2 taškai.
m paklaidų nustatymas – 1 taškas.
Rezultatas 0,2÷0,4 ribose – 1 taškas.
Rezultatas 2–3 ženklų tikslumu – 1 taškas.

D. Pastovaus greičio sąlygų nustatymas
Greičio v nustatymas keliems (n) θ – 1×n taškų (iki 3).
Bent 2 vertės išmatuotos kiekvienam θ – 1 taškas (3 ir daugiau – 2 taškai).
Rezultatų pateikimas grafiškai – 4 taškai.
Teisingai gautos ir pateiktos pastovaus greičio sąlygos – 1 taškas.

E. Magnetinio stabdymo koeficiento išraiškos gavimas esant pastoviam ritiniuko greičiui – 5 taškai.
Parinkimas funkcijų, tinkamų grafiniam vaizdavimui ir skaičiavimui (pvz., tgθ ir v/cosθ) – 2 taškai.
Tų funkcijų verčių gavimas – 2 taškai už kiekvieną matavimą, iki 10 taškų.
Grafiko sudarymas pagal gautus duomenis – 2 taškai už kiekvieną grafiko tašką, iki 10 taškų.
Tiesės grafiko gavimas – 2 taškai.
Parinkto modelio parametrų gavimas iš grafiko – 5 taškai.
m vertės, besiskiriančios nuo nustatytos C dalyje ne daugiau kaip 20 %, gavimas 1 taškas.
(Galutiniam vertinimui antro eksperimento bendras taškų skaičius pernormuotas į 10 taškų).