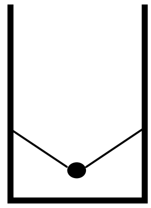
2012 m. Lietuvos 24-ojo fizikos čempionato

UŽDUOČIŲ SPRENDIMAI

2012 m. gruodžio 1 d.

(Kiekvienas uždavinys vertinamas 10 taškų, visa galimų taškų suma – 100)



1. Vienalytis rutuliukas pakabintas indo viduje ant dviejų vienodų lengvų siūlų. Laisvi siūlo galai pritvirtinti viename aukštyje prie vidinių indo sienelių. Į indą pripilame tiek vandens, kad rutuliukas visiškai panyra. Siūlų įtempimas išlieka toks pat. Vandens tankis $\rho_v = 1000\ \text{kg/m}^3$. Koks rutuliuko tankis?

Sprendimas

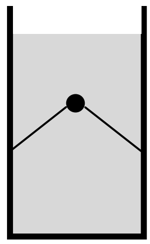
Siūlų įtempimas gali nepakisti tik tokiu atveju, jei rutuliuko tankis ρ mažesnis už vandens tankį. Tokiu atveju, pripylus vandens, rutuliukas pakyla į viršų, o siūlų įtempimas nesikeičia. (2 taškai)

Pirmuoju atveju siūlų įtempimą atsveria sunkio jėga, o antruoju įtempimo jėga bus lygi sunkio ir Archimedo jėgų skirtumui. (2 taškai)

Kadangi įtempimas nepasikeičia tai:

$$mg = F_A - mg, \qquad \text{(2 taškai)}$$

$$2mg = F_A.$$



Kadangi $m = \rho V$, o $F_A = \rho_0 g V$, tai: (2 taškai)

$$\rho = \frac{\rho_0}{2}.$$

$$\rho = 500\,\text{kg/m}^3. \qquad \text{(2 taškai)}$$

2. Kūnas pradeda slysti be trinties nuo $L = 2{,}7\,\text{m}$ ilgio nuožulniosios plokštumos. Suskirstykite plokštumos ilgį į tris atkarpas taip, kad kiekvieną jų kūnas įveiktų per vienodą laiką.

Sprendimas

Tegul pirmąją atkarpą kūnas juda t laiką a pagreičiu, o pirmosios atkarpos ilgis:

$$L_1 = \frac{at^2}{2}. \qquad (1) \qquad \text{(2 taškai)}$$

Kai kūnas nuslys dviejų atkarpų ilgį:

$$L_1 + L_2 = \frac{a(2t)^2}{2} = 2at^2. \qquad (2) \qquad \text{(1 taškas)}$$

Kai trijų:

$$L_1 + L_2 + L_3 = L = \frac{a(3t)^2}{2} = \frac{9at^2}{2}. \qquad (3) \qquad \text{(1 taškas)}$$

Iš čia: $\frac{at^2}{2} = \frac{L}{9}$. (4) (1 taškas)

(4) įrašę į (1), gauname: $L_1 = \frac{L}{9}$. (1 taškas)

(1) lygtį įrašę į (2) ir atsižvelgę į (4), gauname: (1 taškas)

$$L_2 = \frac{3L}{9}. \quad (5) \quad \text{(1 taškas)}$$

(1) ir (5) lygtį įrašę į (3) ir atsižvelgę į (4), gauname:

$$L_3 = \frac{5L}{9}. \qquad L_1 = 0{,}3\,\text{m}, \; L_2 = 0{,}9\,\text{m}, \; L_3 = 1{,}5\,\text{m}. \quad \text{(2 taškai)}$$

3. Subėrus švino ir aliuminio pjuvenų mišinį, kurio temperatūra t_1 = 100 °C, į kalorimetrą su vandeniu, kurio temperatūra t_2 = 15 °C, o masė m = 0,23 kg, nusistovėjo t = 20 °C temperatūra. Kalorimetro šiluminė talpa $C = 50\frac{\text{J}}{°\text{C}}$, švino savitoji šiluma $c_1 = 130\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot°\text{C}}$, aliuminio – $c_2 = 880\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot°\text{C}}$, o vandens – $c = 4200\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot°\text{C}}$. Kokia mišinio masė M? Žinoma, kad švino ir aliuminio pjuvenų masių santykis $\frac{m_1}{m_2} = 3$. Šilumos nuostolių nepaisykite.

Sprendimas

Pagal energijos tvermės dėsnį galime parašyti:

$$Q_1 + Q_2 = Q_3 + Q_4,$$

čia $Q_1 = c_1 m_1 (t_1 - t)$ – šilumos kiekis, kurį atiduoda švino pjuvenos,

$Q_2 = c_2 m_2 (t_1 - t)$ – šilumos kiekis, kurį atiduoda aliuminio pjuvenos, (3 taškai)

$Q_3 = cm(t - t_2)$ – šilumos kiekis, kurį gauna vanduo,

$Q_4 = C(t - t_2)$ – šilumos kiekis, kurį gauna kalorimetras.

Todėl:

$$c_1 m_1 (t_1 - t) + c_2 m_2 (t_1 - t) = cm(t - t_2) + C(t - t_2). \quad \text{(2 taškai)}$$

Arba

$$m_2\left(\left(\frac{m_1}{m_2}c_1 + c_2\right)(t_1 - t)\right) = (cm + C)(t - t_2). \quad \text{(1 taškas)}$$

Atsižvelgę į tai, kad $\frac{m_1}{m_2} = 3$, galime parašyti:

$$m_2 = \frac{(cm + C)(t - t_2)}{(3c_1 + c_2)(t_1 - t)}. \quad \text{(1 taškas)}$$

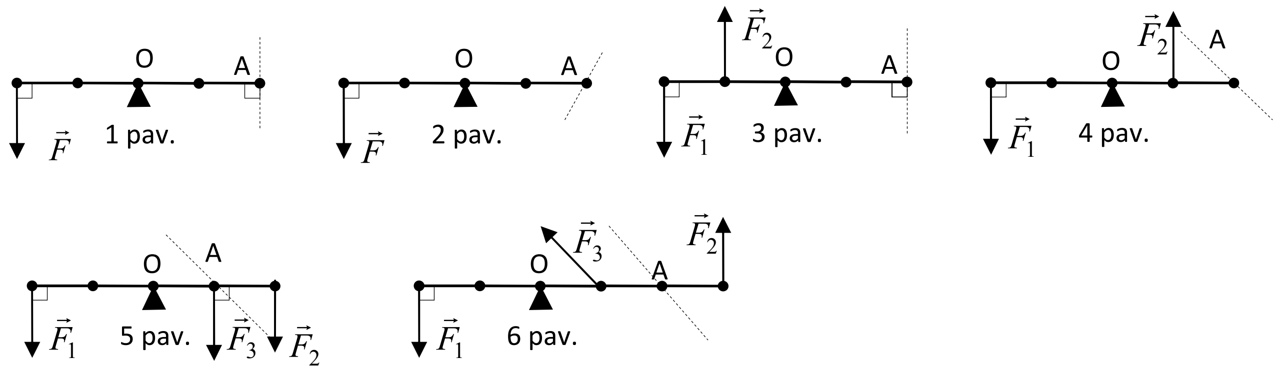
Tada švino ir aliuminio pjuvenų masė:

$$M = m_1 + m_2 = 3m_2 + m_2 = 4m_2. \qquad \text{(1 taškas)}$$

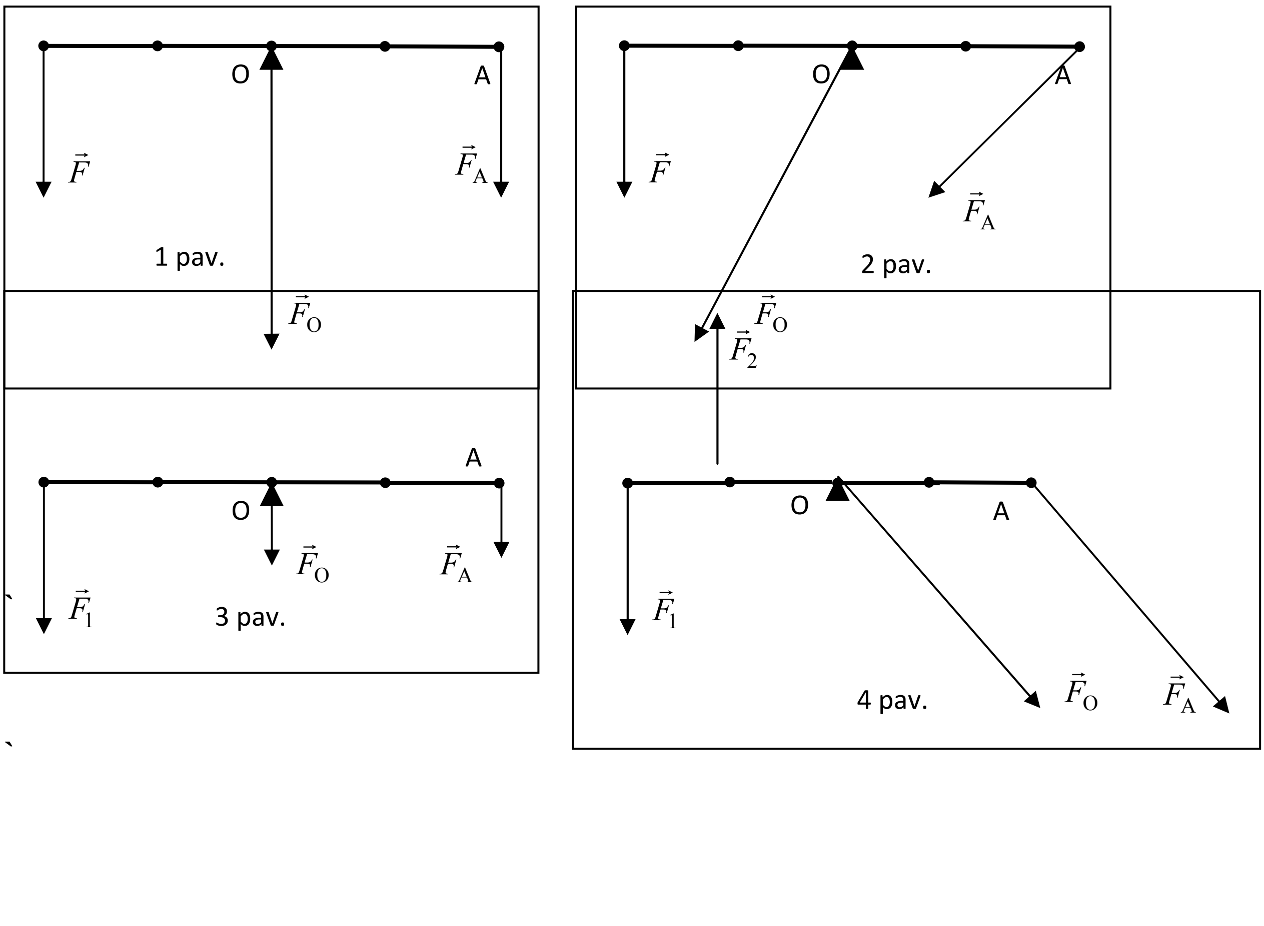
$$M = \frac{4(cm + C)(t - t_2)}{(3c_1 + c_2)(t_1 - t)}. \qquad \text{(1 taškas)}$$

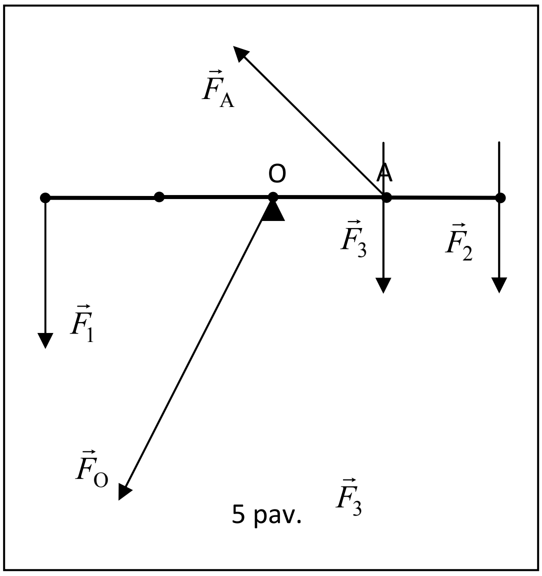
$$M = 0{,}2\ \text{kg}. \qquad \text{(1 taškas)}$$

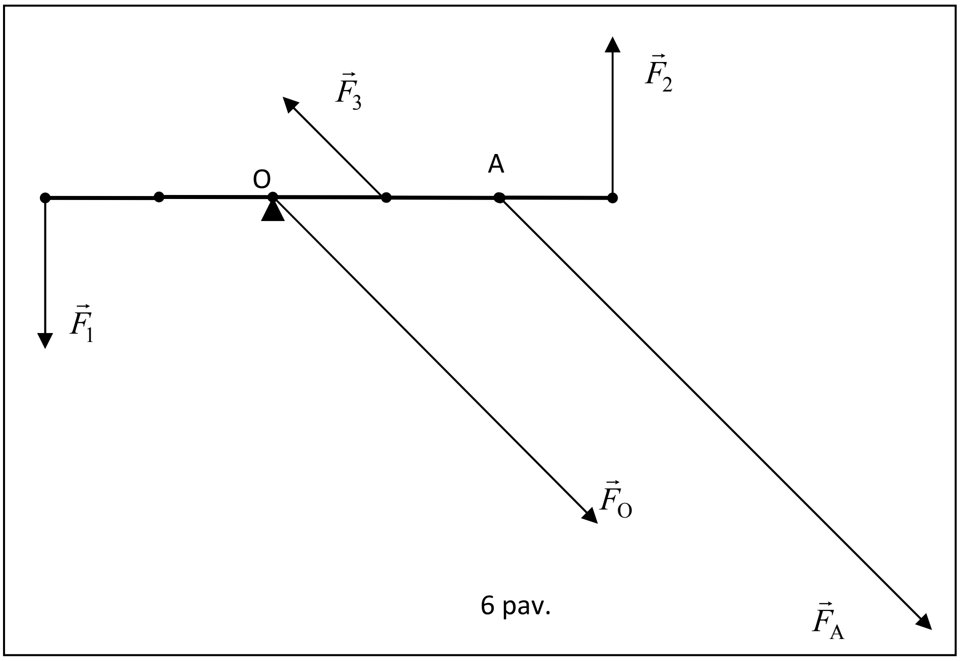
4. Kiekviename iš toliau pateiktų šešių brėžinių reikia nubrėžti jėgą $\vec{F}_A$, veikiančią taške A išilgai nurodytos punktyrinės linijos ir užtikrinančią nesvaraus strypo pusiausvyrą, ir jėgą $\vec{F}_O$, veikiančią sukimosi ašį O esant pusiausvyrai. Taškai strype pažymi vienodo ilgio atkarpas (braižant sąsiuvinyje – 3 langeliai), o visos duotos jėgos yra to paties modulio (4 langeliai). Visos nubraižytos pasvirusios linijos sudaro 45° kampą su strypu.



Sprendimas







1 pav. ir 2 pav. po 1 tašką; 3 pav., 4 pav., 5 pav. ir 6 pav. po 2 taškus.
Tokie taškai rašomi ne tik už **teisingus** atsakymus, bet ir **tvarkingus**.

5. Gulsčias cilindras su stūmokliu yra įmontuotas didesniame inde. Oro slėgis abiejose stūmoklio pusėse yra vienodas. Atstumas tarp stūmoklio ir cilindro galo lygus 6 cm. Didesniajame inde oro slėgis yra pakeliamas tiek, kad stūmoklis pasislenka per 5 cm, o po to iš didesniojo indo orą išleidus iki pradinio slėgio stūmoklis grįžta atgal per 4 cm. Kiek kartų oro slėgio pokytis didesniajame inde yra didesnis nei pradinis slėgis?

Sprendimas

Tegul l = 6 cm; a = 5 cm; b = 4 cm, slėgio pokytis Δp, pradinis oro slėgis p_0. Turime rasti $\Delta p/p_0$.

Pagal sąlygos duomenis

$l - a + b = 6 - 5 + 4 < l$, (1 taškas)

o tai reiškia, kad stūmoklis negrįžta į pradinę padėtį ir reikia atsižvelgti į trinties jėgą. Tegu ji vienodo dydžio nepriklausomai nuo veikimo krypties:

$$F_1 = F_2 = F. \qquad \text{(2 taškai)}$$

Pagal Boilio ir Marioto dėsnį

$$p_0 Sl = p_1 S(l-a);$$

$$p_0 Sl = p_2 S(l-a+b), \qquad \text{(2 taškai)}$$

čia S – stūmoklio skerspjūvio plotas.

Stūmoklio pusiausvyros sąlyga

$$p = p_0 + \Delta p = p_1 + \frac{F_1}{S} = \frac{p_0 l}{l-a} + \frac{F}{S};$$

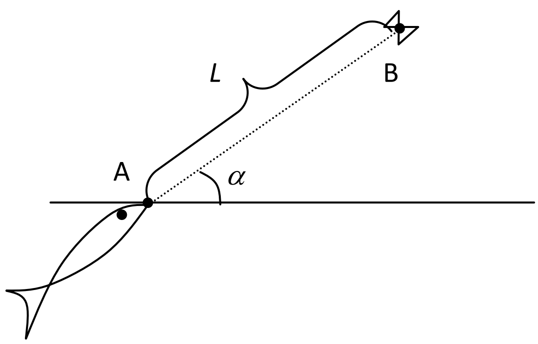
$$p_0 = p_2 - \frac{F_2}{S} = \frac{p_0 l}{l-a+b} - \frac{F}{S}, \qquad \text{(2 taškai)}$$

o tai sudėjus

$$\Delta p = p_0\left(\frac{l}{l-a} + \frac{l}{l-a+b} - 2\right); \qquad \text{(2 taškai)}$$

$$\frac{\Delta p}{p_0} = \frac{6}{6-5} + \frac{6}{6-5+4} - 2 = 5{,}2. \qquad \text{(1 taškas)}$$

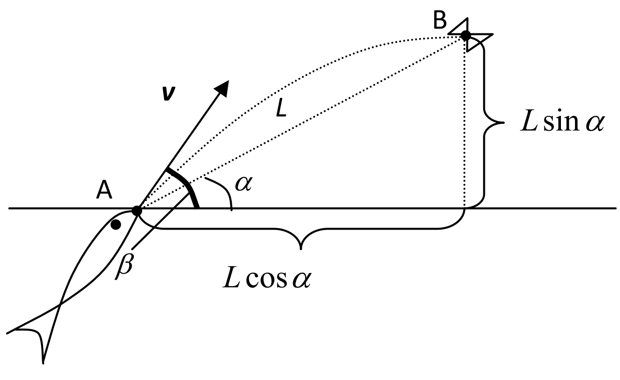
6. Viena iš Pietryčių Azijos žuvų rūšių medžioja smulkius vabzdžius, tupinčius ant medžio šakelės, išpurkšdama vandens lašelius ir taip numušdama juos į vandenį. Nors tašką A, kuriame ties vandens paviršiumi yra žuvis, ir tašką B, kuriame ant šakelės tupi vabzdys, jungianti tiesės atkarpa su horizontu sudaro kampą $\alpha = 30°$ (žr. brėž.), lašelį ji turi iššauti kitu kampu. (a) Apskaičiuoti, kokiu kampu į horizontą β turi būti žuvies paleistas vandens lašelis, kad vabzdį pasiektų viršutiniame trajektorijos taške? (b) Kokį greitį žuvis turi suteikti lašeliui, jei atstumas nuo žuvies iki vabzdžio $L = 1{,}0$ m ?



Sprendimas

(a) Lašeliai lekia parabolės trajektorija, kurios viršūnė taške B. Jei greičio kryptis su horizontu sudaro kampą β, o lašelio lėkimo iš taško A į B laikas t, tai $gt = v\sin\beta$. Iš čia

$t = \dfrac{v\sin\beta}{g}$. (1 taškas); brėžinys – (1 taškas)



Tada $L\cos\alpha = tv\cos\beta$ - (1 taškas). Įrašę t išraišką,

$L\cos\alpha = \dfrac{v\sin\beta}{g} v\cos\beta$. Taigi, $v = \sqrt{\dfrac{Lg\cos\alpha}{\sin\beta\cos\beta}}$. (1 taškas)

Antra vertus, vertikaliam judėjimui $v\sin\beta = \sqrt{2gL\sin\alpha}$ - (1 taškas). Tada

$\dfrac{Lg\cos\alpha}{\sin\beta\cos\beta}\sin^2\beta = 2gL\sin\alpha$. Iš čia $\mathrm{tg}\beta = 2\mathrm{tg}\alpha$ - (2 taškai).

$\beta = \mathrm{arctg}(2\mathrm{tg}\alpha) = 49{,}1°$ - (1 taškas).

(b) Pasinaudodami apskaičiuotu kampu β ir gautua greičio išraiška, galime jį apskaičiuoti:

$v = \sqrt{\dfrac{Lg\cos\alpha}{\sin\beta\cos\beta}} \approx 4{,}14\ \mathrm{m/s}$. (1 taškas už formulės pritaikymą, 1 taškas už skaitinę vertę).

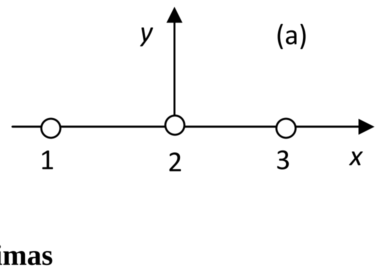
Galima rasti v išraišką ir vien per duotus sąlygoje dydžius. Tam pasinaudojame trigonometriniais sąryšiais

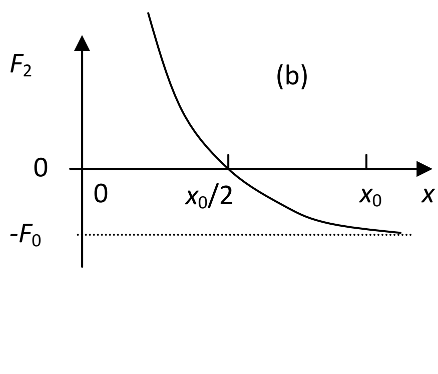
$$\sin\beta = \frac{\mathrm{tg}\beta}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\beta}}, \quad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\beta}}.$$

Tada $v = \sqrt{\dfrac{Lg\cos\alpha}{\sin\beta\cos\beta}} = \sqrt{\dfrac{gL\cos\alpha(1+4\mathrm{tg}^2\alpha)}{2\mathrm{tg}\alpha}} = 4{,}14\ \mathrm{m/s}$.

7. Paveiksle (a) parodyta, kaip x-ašyje išsidėsčiusios turinčios krūvius mažos dalelės atitinkamai taškuose 1, 2 ir 3. $|q_1| = +9q_0$, čia $q_0 = 1{,}6\cdot10^{-19}\ \mathrm{C}$ - elementarusis krūvis; $q_3 = -q_0$. Trečiosios dalelės atstumas iki antrosios yra x ir gali kisti nuo 0 iki ∞. Antrąją dfalelę veikianti suminė elektrostatinė jėga F_2 nuo atstumo x priklauso taip, kaip parodyta (b) pav. Kai $x \to \infty$, ši jėga artėja į ribinę vertę $F_0 = 3{,}20\cdot10^{-27}\ \mathrm{N}$, o $x_0 = 1{,}20\ \mathrm{m}$.

(a) Kokie krūvių q_1 ir q_2 ženklai?
(b) Koks atstumas r tarp pirmosios ir antrosios dalelės?
(c) Kam lygus krūvis q_2?





Sprendimas

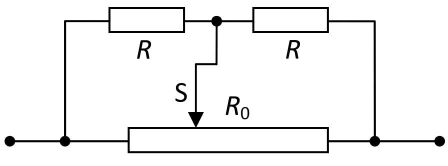
(a) Kai $x \to 0$, $F_2 \to +\infty$, vadinasi, q_2 turi priešingą ženklą negu q_3, t.y. $q_2>0$ – (1 taškas). Kai $x \to \infty$, $F_2<0$, vadinasi, q_1 yra priešingo ženklo negu q_2, t.y. $q_1<0$ – (1 taškas).
(b) Kai atstumas trap antrosios ir trečiosios dalelės lygus $x_0/2$, $F_2 = 0$ - (1 taškas), t.y. jėgos, kuriomis antrąją dalelę veikia pirmoji ir antroji, kompensuoja viena kitą (1 taškas). Tada pagal Kulono dėsnį

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1 q_2|}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_2 q_3|}{(x_0/2)^2}$$ - (1 taškas). Iš čia $r = \frac{x_0}{2}\sqrt{\left|\frac{q_1}{q_3}\right|} = 1{,}8\ \mathrm{m}$. (1 taškas už formulę, 1 taškas už skaitinę vertę).

(c) Kai $x \to \infty$, $F_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1 q_2|}{r^2}$ - (1 taškas). Iš čia (atsižvegę į tai, kad q_2>0) randame

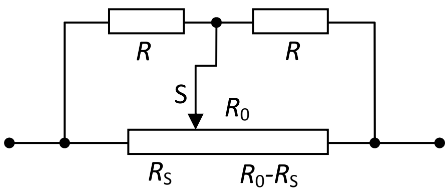
$$q_2 = \frac{4\pi\varepsilon_0 F_0 r^2}{|q_1|} = \frac{\pi\varepsilon_0 F_0 x_0^2}{|q_3|} = 8\cdot 10^{-19}\ \mathrm{N} = 5q_0$$ (1 taškas už formulę, 1 taškas už skaitinę vertę).

8. Grandinę sudaro du vienodų varžos R rezitoriai ir visos varžos $R_0=2R$ potenciomertras kaip parodyta paveiksle. Kokioje padėtyje turi būti potenciometro slankiklis S, kad grandinės visa varža būtų mažiausia? Nubrėžkite visos varžos priklausomybę nuo slankiklio padėties grafiką, kai potenciometro ilgis lygus vienetui.



Sprendimas.

Bendru atveju reikėtų pažymėti potenciometro dalių varžas R_S ir $R_0 - R_S$, užrašyti bendrąją varžą R_B, rasti išvestinę pagal R_S, prilyginti ją 0 ir rasti R_S vertes, kurios užtikrina visos varžos ekstremumą. Visa varža



$$R_P = \frac{R\cdot R_S}{R+R_S} + \frac{R\cdot(2R-R_S)}{3R-R_S}$$ (2 taškai)

Šiuo atveju grandinė yra simetriška ir ekstremalios visos varžos vertės bus, kai slankiklis S yra per vidurį $R_S = R_0 - R_S = R$, arba kraštinėse padėtyse: $R_S = 0$ arba $R_S = R_0 = 2R$.

1) Kai $R_S = R_0 - R_S = R$. $R_B = \frac{RR}{R+R} + \frac{RR}{R+R} = R$. (1 taškas)

2) Kai $R_S = 0$. $R'_B = \frac{RR_0}{R+R_0} = \frac{2}{3}R$. (1 taškas)

Rezultatas, kai $R_S = R_0$, bus toks pat, t.y. $R''_B = \frac{2}{3}R$

$\boxed{\text{Varža bus mažiausia, kai slankiklis S bus kraštinėse padėtyse}}$. (1 taškas)

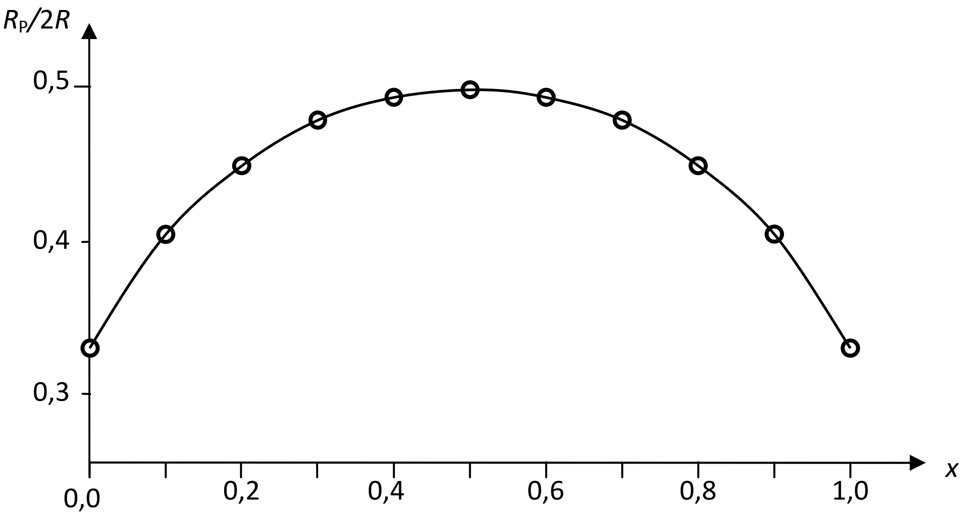
Pažymėsime slankiklio padėtį x. Tada $R_S = 2xR$. Visa varža:

$$R_P = \frac{2xR^2}{R+2xR} + \frac{2(1-x)R^2}{R+2(1-x)R}. \qquad \text{(1 taškas)}$$

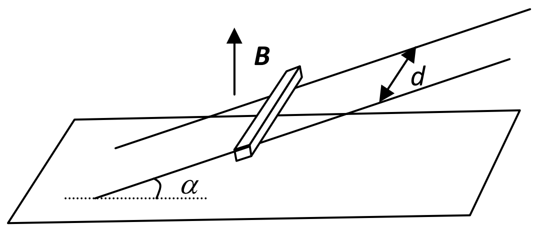
$$R_P = 2R\left(\frac{x}{1+2x} + \frac{(1-x)}{1+2(1-x)}\right). \quad R_P = 2R\left(\frac{x}{1+2x} + \frac{1-x}{3-2x}\right). \qquad \text{(1 taškas)}$$

Pagal gautą formulę sudarome lentelę (1 taškas) ir pagal ją braižome grafiką (2 taškai).

x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$R_P/2R$	0,333	0,405	0,451	0,479	0,495	0,500	0,495	0,479	0,451	0,405	0,333

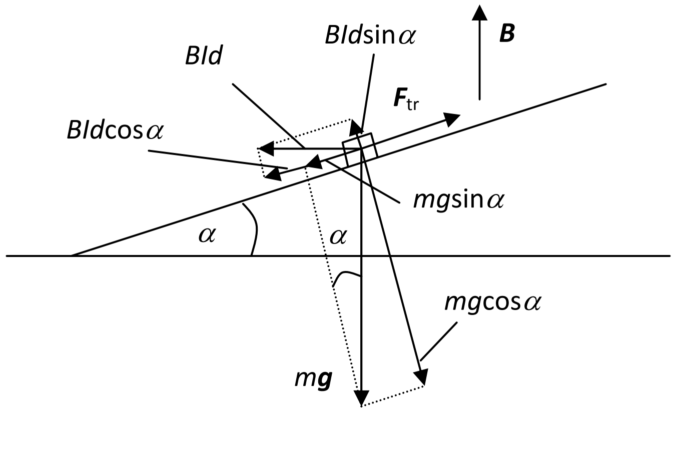


9. Ant dviejų lygiagrečių metalinių izoliuotų bėgių, sudarančių kampą $\alpha = 15°$ su horizontu, statmenai bėgiams padėtas plonas masės $m = 200$ g metalinis strypelis, turintis elektrinį kontaktą su bėgiais (žiūr. brėž.). Atstumas tarp bėgių $d = 15$ cm, o trinties tarp bėgių ir strypelio koeficientas $\mu = 0{,}40$. Bėgiai ir strypelis yra vertikaliame vienalyčiame magnetiniame lauke, kurio indukcija $B = 0{,}50$ T. Prie bėgių prijungus srovės šaltinį, bėgiais ir strypeliu pradeda tekėti elektros srovė. Kokiai srovės krypčiai ir kokiam minimaliam jos stipriui I strypelis pradeda judėti bėgiais?



Sprendimas

Brėžinys išilgai strypelio atrodo taip:



Tekant strypeliu srovei, jis yra veikiamas Ampero jėgos $F_A = BId$ (kampas tarp **B** ir srovės tekėjimo krypties status). Akivaizdu, kad minimali srovės stipro vertė bus pasiekiama, kai Ampero jėga brėžinyje nukreipta į kairę, t.y. srovė teka į mus. Priešingos krypties atveju strypelis turėtų pajudėti į viršų, taigi sunkio jėgos dedamoji priešintųsi judėjimui, be to, padidėtų spaudimo į bėgius jėga ir padidintų trinties jėgą. Tuo būdu, pajudėjimo momentu galime užrašyti jėgų išilgai bėgių lygybės sąlygą: (1 taškas už brėžinį ir 2 taškai už išvadas apie minimalią srovės vertę)

$mg\sin\alpha + BId\cos\alpha = \mu(mg\cos\alpha - BId\sin\alpha)$.   (5 taškai)

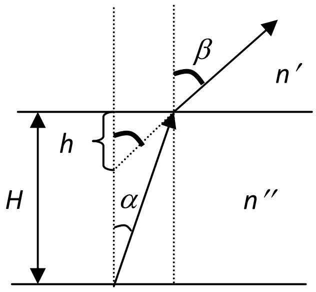
Išsprendę lygtį surandame

$I = \dfrac{mg(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)}{Bd(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)} \approx 3{,}1\ \text{A}$ (2 taškai už formulę ir 1 taškas už skaitinę vertę).

10. Ant stalo padėtas stiklinis indas su įpiltu vandeniu. Indo dugno storis $d_1 = 2{,}0\ \text{cm}$, o vandens sluoksnio storis $d_2 = 3{,}0\ \text{cm}$. Kokiu atstumu d vandens paviršiaus atžvilgiu stebėtojui atrodo stalo paviršius, jei stebėtojas žiūri statmenai vandens paviršiui? Vandens lūžio rodiklis $n_1 = 1{,}33$, o stiklo $n_2 = 1{,}60$.

Nurodymas: panagrinėti mažai besiskečiančius šviesos spindulius, sklindančius į stebėtoją nuo stalo paviršiaus. Galima pasinaudoti apytikre formule nedideliems kampams $\sin\alpha \approx \text{tg}\alpha$.

Sprendimas

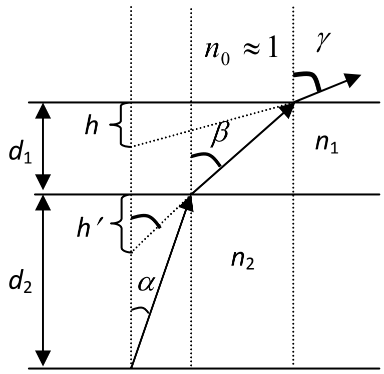


Panagrinėjame spindulių eigą esant vienam optiškai tankesnės aplinkos sluoksniui (tegul aplinkų lūžio rodikliai $n' < n''$, o sluoksnio storis H.

Žiūrint statmenai iš viršaus apačioje esantis taškas H atstumu nuo paviršiaus atrodys esantis atstumu h. Taigi, $h\text{tg}\beta = H\text{tg}\alpha$. Iš čia

$h = \dfrac{H\text{tg}\alpha}{\text{tg}\beta} \approx \dfrac{H\sin\alpha}{\sin\beta}$. Bet $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} \approx \dfrac{n'}{n''}$. Tada $h \approx \dfrac{Hn'}{n''}$.   (4 taškai)

Šį rezultatą vandens sluoksniui ir stikliniam indo dugnui pritaikome du kartus.



Stiklui ir vandeniui: $h' = \dfrac{d_2\text{tg}\alpha}{\text{tg}\beta} \approx \dfrac{d_2\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{d_2 n_1}{n_2}$. (3 taškai)

Vandeniui ir orui:

$h = \dfrac{(h'+d_1)\text{tg}\beta}{\text{tg}\gamma} \approx \dfrac{(h'+d_1)\sin\beta}{\sin\gamma} = \dfrac{(h'+d_1)}{n_1} = \dfrac{d_1 n_2 + d_2 n_1}{n_1 n_2} \approx 3{,}4\ \text{cm}$ (3 taškai)