VYTAUTAS RINKEVIČIUS

ELEKTROSTATIKA

FIZIKOS OLIMPAS
Vilnius 1998

UDK 537.2(075.3)
El-41

Parengė Vilniaus universiteto docentas Vytautas Rinkevičius

Stilistė Zita Kutraitė

Nuo 2004 04 20 ši mokymo knyga yra ir interneto svetainėje www.olimpas.lt .

ISBN 9986-778-11-5

Turinys

1. Įvadas

Elektrostatika nagrinėja nejudančių krūvių sąveiką bei tokių krūvių sukurtą lauką, vadinamą **elektrostatiniu lauku. Elektros krūvis –** tai vienas iš pagrindinių elementariųjų dalelių apibūdinimų (šalia masės, judėjimo kiekio momento (sukinio) ir kt.). Kiekviena elementarioji dalelė turi arba **teigiamą**, arba **neigiamą** elektros krūvį, ar esti **neutrali** (t.y. neturi krūvio arba turi po lygiai teigiamų ir neigiamų krūvių). Bet kokio kūno krūvis yra tą kūną sudarančių elementariųjų dalelių krūvių algebrinė suma.

Elektrostatinis laukas tam tikra prasme yra abstrakcija, nes gamtoje nejudančių krūvių nėra. Kaip žinome, visos elementariosios dalelės ir iš jų sudaryti atomai bei molekulės nuolat netvarkingai juda. Tačiau jei kūno krūvį sudaro daug elementariųjų dalelių ir erdvės taško, kuriame nagrinėjamas laukas, nuotolis nuo kūno yra daug didesnis už netvarkingai judančių elektrintųjų dalelių trajektorijų matmenis, lauką nagrinėjamame taške tam tikru tikslumu galime laikyti **elektrostatiniu lauku.** Taigi tai yra visiška analogija su statika mechanikoje: nors bet kokį kūną sudarančios dalelės nepaliaujamai juda, pats kūnas, sudarytas iš tų dalelių, gali ir nejudėti.

2. Elektros krūvio tvermės dėsnis

Šis dėsnis teigia, kad **uždaros sistemos krūvių algebrinė suma nekinta.** Matematiškai šį teiginį galima užrašyti taip:

$$\sum_i q_i = const. \qquad (1)$$

Šis dėsnis galioja bet kokiu atveju, kad ir kokie vyksmai vyktų sistemos viduje. Joje gali vykti įvairios cheminės, branduolinės bei elementariųjų dalelių virsmų reakcijos.

Pastebėsime, jog elektros krūvis nepriklauso nuo greičio. Imkime tokį pavyzdį. Žinoma, kad bet kokios medžiagos atomą sudaro branduolys ir aplink jį skriejantys elektronai. Toks atomas yra neutrali sistema, nors elektronai aplink branduolį skrieja gana dideliais (reliatyvistiniais greičiais). Atomą galima jonizuoti nuo branduolio atplėšus elektronus. Eksperimentas rodo, kad nuo branduolio atplėštų ir sustabdytų elektronų krūvių suma absoliutiniu didumu lygi branduolio krūviui. Teigiama, jog krūvis yra **reliatyvistinis invariantas.** To negalima pasakyti, pavyzdžiui, apie masę, kuri pagal reliatyvumo teoriją yra priklausoma nuo greičio.

3. Kulono dėsnis ir jo aiškinimas vartojant lauko sąvoką

1785 m. eksperimentiškai matuodamas įelektrintų kūnų sąveikos jėgą, Kulonas (Ch. O. Coulomb) atrado dėsnį: du sąveikaujantys taškiniai krūviai q_1 ir q_2, esantys vakuume r atstumu vienas nuo kito, veikia vienas kitą jėga

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}. \qquad (2)$$

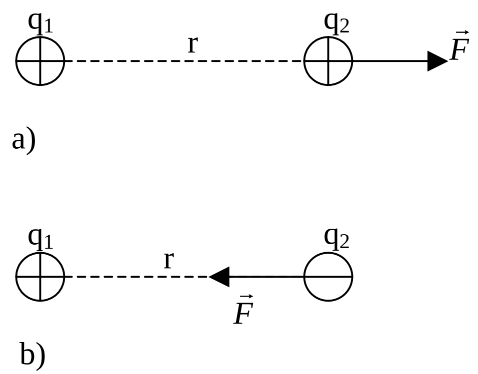
Čia k – proporcingumo koeficientas, priklausantis nuo pasirinktos vienetų sistemos. Tarptautinėje vienetų sistemoje (SI) jėgos vienetas yra Niutonas (N), atstumo – metras (m), o krūvio – kulonas (C). Tuomet $k = 9\cdot10^9$ m/F. Tačiau konstanta k Kulono dėsnyje retai vartojama. Kad būtų paprastesnės formulės įvedama nauja konstanta $\varepsilon_0 = 1/4\pi k$. Tuomet Kulono dėsnis užrašomas taip:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}. \qquad (3)$$

ε_0 vadinama **elektrine konstanta.** Jos skaitinė vertė tokia: $\varepsilon_0 = 10^{-9}/(36\pi) \approx 8{,}85\cdot10^{-12}\, F/m.$

Taškiniai krūviai – tai įelektrinti kūnai, kurių matmenys daug mažesni už atstumus tarp jų. Taigi taškinio krūvio sąvoka analogiška materialaus taško sąvokai mechanikoje. Taip pat buvo eksperimentiškai nustatyta ir Kulono jėgos kryptis: ji yra tiesėje, einančioje per krūvius q_1 ir q_2, t.y. kuloninės sąveikos jėgos yra **centrinės** (1pav.).

Nuo seno yra žinoma, kad du krūviai gali arba stumti, arba traukti vienas kitą. To paties ženklo (vienarūšiai) krūviai vienas kitą stumia (1 pav., a), o skirtingų ženklų (įvairiarūšiai) krūviai – traukia (1 pav.,



1 pav.

b). Pažymėję $\vec{r}$ vektorių, nukreiptą nuo pirmojo krūvio q_1 į antrąjį krūvį q_2, antrąjį krūvį veikiančios jėgos vektorių $\vec{F}$ galime taip užrašyti:

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\vec{r}}{r}. \qquad (4)$$

Tuomet stūmos atveju ($q_1 q_2 > 0$) $\vec{F} \uparrow\uparrow \vec{r}$, o traukos atveju ($q_1 q_2 < 0$) $\vec{F} \uparrow\downarrow \vec{r}$.

Elektrostatinė sąveika tarp krūvių perduodama per tarpininką – **elektrostatinį lauką.** Tai yra tam tikra materijos forma. Šiuo metu žinomos dvi materijos formos – medžiaga ir laukas. Taigi kiekvienas krūvis erdvėje aplink save kuria elektrostatinį lauką. Jei tame lauke yra kitas krūvis, tai jį veikia jėga. Dažnai sakoma, kad krūvį veikia elektrostatinis laukas (arba elektrinis laukas), tuo lyg ir atsiribojant nuo tą lauką sukuriančių krūvių.

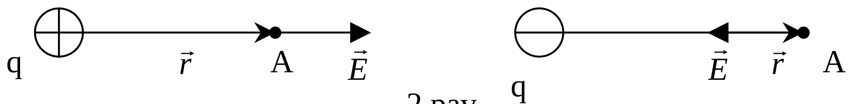
Pažymėsime, kad be elektrostatinio (t.y. sukurto nejudančių krūvių) lauko yra žinomas ir kitos kilmės elektrinis lauka, kurį sukuria kintantis laike arba erdvėje magnetinio lauko srautas. Nors tas laukas kai kuriomis savybėmis skiriasi nuo elektrostatinių lauko, vis dėlto svarbiausia jo savybė – veikti krūvį tam tikra jėga, yra ta pati. Todėl dažnai vietoj **elektrostatinio** lauko sakoma ir rašoma **elektrinis** laukas.

4. Elektrinio lauko stipris

Tai pagrindinė elektrinio lauko charakteristika. Jėga, veikianti tam tikrame lauko taške esantį krūvį q, yra proporcinga to krūvio dydžiui, taip pat ji priklauso nuo lauko savybių. Ta priklausomybė gali būti taip užrašyta: $\vec{F} = q\vec{E}$. (5)

Iš (5) gauname: $\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{q}$. (6)

Dydis $\vec{E}$ vadinamas elektrinio lauko stiprio vektoriumi. Taigi **elektrinio lauko stipris lygus jėgai, veikiančiai vienetinį teigiamą krūvį.** Jo SI vienetas yra $1N/C = 1V/m$.



2 pav.

Taškinio krūvio q lauko stipris taške, nutolusiame atstumu r nuo to krūvio, lengvai apskaičiuojamas, į (6) įrašius jėgos išraišką pagal Kulono dėsnį (4). Gausime:

$$\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}, \qquad (7)$$

o $\vec{E}$ modulis

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \qquad (8)$$

Esant teigiamam taškiniam krūviui $\vec{E}$ yra nukreiptas nuo krūvio, o neigiamam - į krūvį (2 pav.).

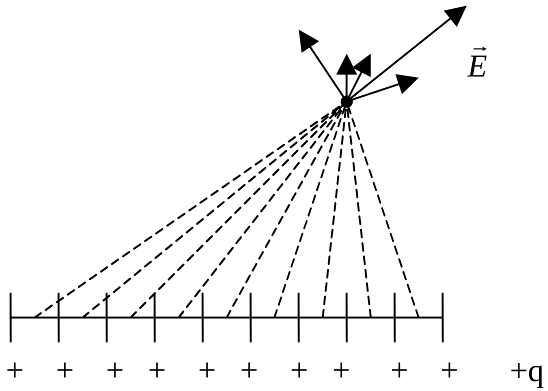
5. Superpozicijos principas

Šis principas teigia, kad **taškinių krūvių sistemos sukurto elektrinio lauko stipris yra lygus atskirų tos sistemos krūvių sukurtų laukų vektorinei sumai:**

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i\vec{r}}{r_i^3}. \qquad (9)$$

Superpozicijos principo negalima įrodyti vien tik teoriniais samprotavimais. Tai yra eksperimentinių faktų apibendrinimo rezultatas.

Superpozicijos principas leidžia bet kokios krūvių sistemos sukurtą lauką apskaičiuoti naudojantis taškinio krūvio lauko stiprio formule (7). Pavyzdžiui, norėdami apskaičiuoti tiesios įelektrintos atkarpos lauką bet kokiame taške C, mintyse padalykime tą atkarpą į tokias mažas atkarpėles, kad jose esančius krūvius būtų galima laikyti taškiniais, ir vektoriškai sudėkime tų atkarpėlių laukus (3 pav.). Praktiškai tas atliekama integruojant.



3 pav.

6. Ilginis, paviršinis ir tūrinis krūvio tankiai

Taškiniai krūviai, kaip ir materialieji taškai, gamtoje neegzistuoja, o krūviai būna pasiskirstę linijose, paviršiuose ar tūriuose. Šiems pasiskirstymams apibūdinti įvedami atitinkami dydžiai.

Jei krūvis q yra tolydžiai pasiskirstęs l ilgio linijos atkarpoje, dydis

$$\tau = \frac{q}{l} \qquad (10)$$

vadinamas **ilginiu krūvio tankiu.** Netolydžiai pasiskirsčius krūviui reikia imti be galo mažą linijos atkarpėlę dl. Jei tos atkarpėlės krūvis dq,

$$\tau = \frac{dq}{dl}. \qquad (11)$$

Ilginio krūvio tankio SI vienetas 1 C/m.

Analogiškai apibrėžiami **paviršinis krūvio tankis**

$$\sigma = \frac{q}{S}, \qquad (12)$$

bei

$$\sigma = \frac{dq}{dS} \qquad (13)$$

ir **tūrinis krūvio tankis**

$$\rho = \frac{q}{V}, \qquad (14)$$

bei

$$\rho = \frac{dq}{dV}. \qquad (15)$$

Šių dydžių vienetai atitinkamai yra 1 C/m^2 ir 1 C/m^3. Žinant krūvių tankius, sistemos krūviai nustatomi integruojant:

$$q = \int_{(l)} \tau dl, \qquad (16)$$

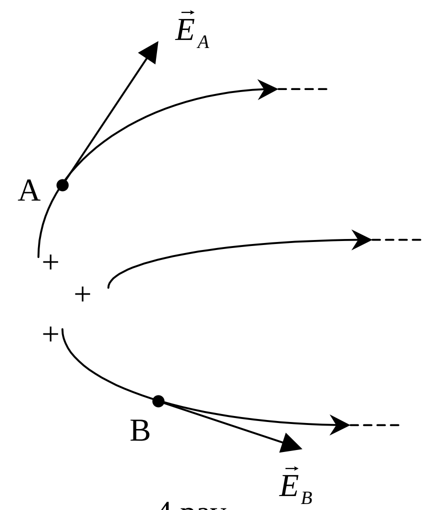
$$q = \int_{(S)} \sigma dS, \qquad (17)$$

$$q = \int_{(V)} \rho dV. \qquad (18)$$

7. Grafinis elektrinio lauko vaizdavimas jėgų linijomis. Jėgų linijų srautas

Kiekvieną elektrinio lauko tašką apibūdina vektorius $\vec{E}$. Jį būtų galima pavaizduoti tiesės atkarpa su rodykle, kaip vaizduojami vektoriai. Tačiau toks vaizdavimo būdas nėra patogus, kai mus domina ne vienas lauko taškas, o tam tikra lauko sritis. Patogesnis būtų Faradėjaus (M. Faraday) pasiūlytas lauko vaizdavimas jėgų linijomis.

Jėgų linija yra tokia, kurios liestinės kiekviename taške kryptis sutampa su $\vec{E}$ vektoriaus kryptimi tame taške. Kad būtų aišku, kuria iš dviejų galimų liestinės krypčių nukreiptas vektorius $\vec{E}$, jėgų linijos pažymimos rodyklėmis (4 pav.).

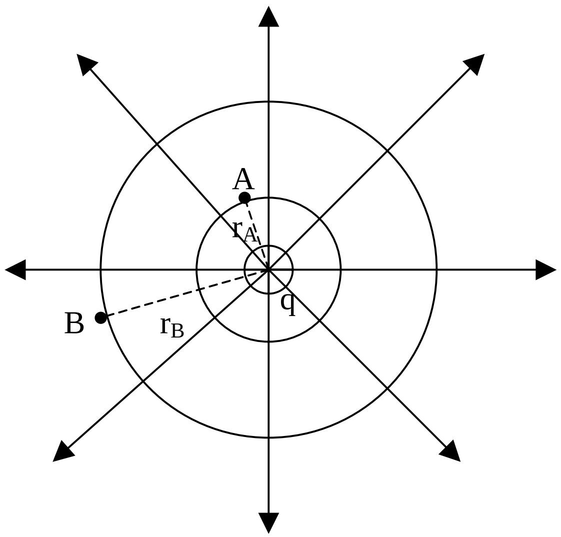


4 pav.

Sutarta, jog jėgų linijos prasideda teigiamuose krūviuose ir baigiasi neigiamuose (arba begalybėje, jei tokių krūvių nėra). Teigiamieji krūviai yra elektrostatinio lauko šaltiniai, o neigiamieji krūviai – sankaupų taškai arba neigiamieji šaltiniai.

Kaip sužinosime vektoriaus $\vec{E}$ ilgį (modulį) ? Jei turėtume; nubrėžtą tik vieną jėgos liniją, einančią per mums rūpimą tašką, to padaryti negalėtume. Reikia turėti jėgų linijų vaizdą to taško aplinkoje. Tada $\vec{E}$ **modulis yra proporcingas skaičiui jėgų linijų, kertančių vienetinį statmenai jėgų linijoms paimtą plotą (jėgų linijų tankiui).** Kad taip taškinių krūvių atvejais, matyti iš 5 pav.

Jei taškas A nutolęs nuo krūvio atstumu r_A, o taškas B – atstumu r_B, pagal (8)



5 pav.

$$\frac{E_A}{E_B} = \frac{r_B^2}{r_A^2}.$$

Kadangi sferų paviršių plotai $S_A = 4\pi r_A^2$, $S_B = 4\pi r_B^2$ ir abu paviršius kerta tiek pat jėgų linijų, kad

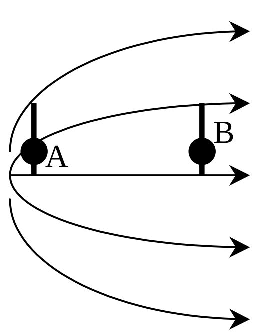
$$\frac{E_A}{E_B} = \frac{S_B}{S_A},$$

arba

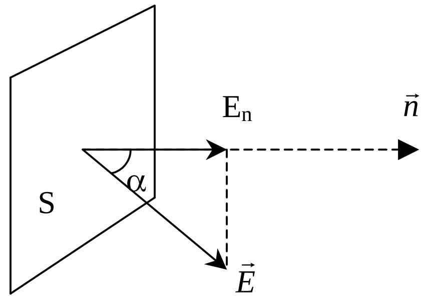
$$E_A S_A = E_B S_B = \Psi. \qquad (19)$$

Čia Ψ - skaičius jėgų linijų, kertančių plotą S_A arba S_B. Ψ vadinamas **jėgų linijų srautu** per paviršius S_A bei S_B.

Bet kokios krūvių sistemos laukas pagal superpozicijos principą gali būti įsivaizduojamas kaip taškinių krūvių laukų vektorinė sumą, tad teiginys, kad $\vec{E}$ modulis yra proporcingas jėgų linijų tankiui, yra teisingas bet kokiam elektrostatiniam laukui.



6 pav.



7 pav.

Pavyzdžiui, 6 pav. taške A laukas du kartus stipresnis negu taške B.

Tiksliau jėgų linijų (arba $\vec{E}$ vektoriaus) srautu per paviršių S vadinamas dydis

$$\Psi = E_n S = ES\cos\alpha. \qquad (20)$$

Čia α - kampas tarp $\vec{E}$ ir paviršiaus normalės (statmens) $\vec{n}$, $E_n = E\cos\alpha$ - $\vec{E}$ projekcija į paviršiaus normalę. Esant nevienalyčiam laukui reikia sumuoti srautus $d\Psi$ per be galo mažus plotelius dS. Tada

$$\Psi = \int_{(S)} E_n dS. \qquad (21)$$

Elektrostatinio lauko srauto SI vienetas yra 1 V.m.

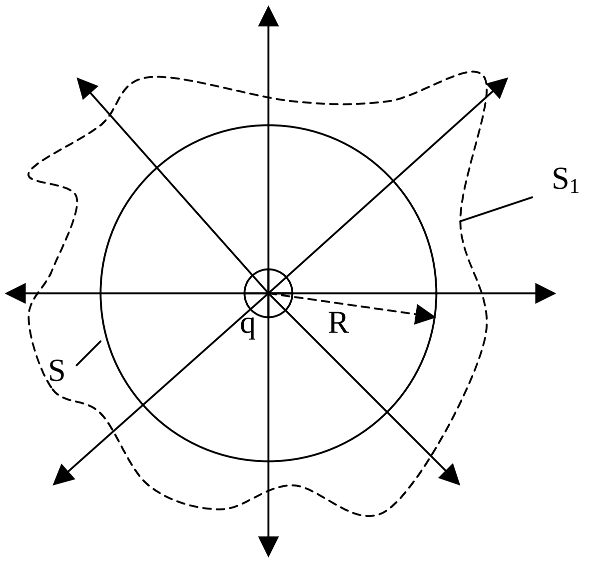
8. Gauso dėsnis

Taškinį krūvį q padėkime R spindulio sferos centre ir apskaičiuokime srautą per sferos paviršiaus plotą $S = 4\pi R^2$ (8 pav.). Kadangi visos $\vec{E}$ linijos šiuo atveju statmenos sferos paviršiui ir $\vec{E}$ modulis visuose sferos paviršiaus taškuose yra vienodas ir lygus $E = q/(4\pi\varepsilon_0 R^2)$,

$$\Psi = ES = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cdot 4\pi R^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}. \qquad (22)$$

Kaip matome, srautas Ψ nepriklauso nuo sferos spindulio R, jis priklauso tik nuo krūvio q.

Dabar vietoj sferos imkime bet kokios formos uždarą paviršių, apgaubiantį krūvį q, pavyzdžiui, S_1 (8 pav.). Tuomet srautą turėsime skaičiuoti pagal (21), nes $\vec{E}$ modulis įvairiose paviršiaus vietose bus skirtingas.



8 pav.

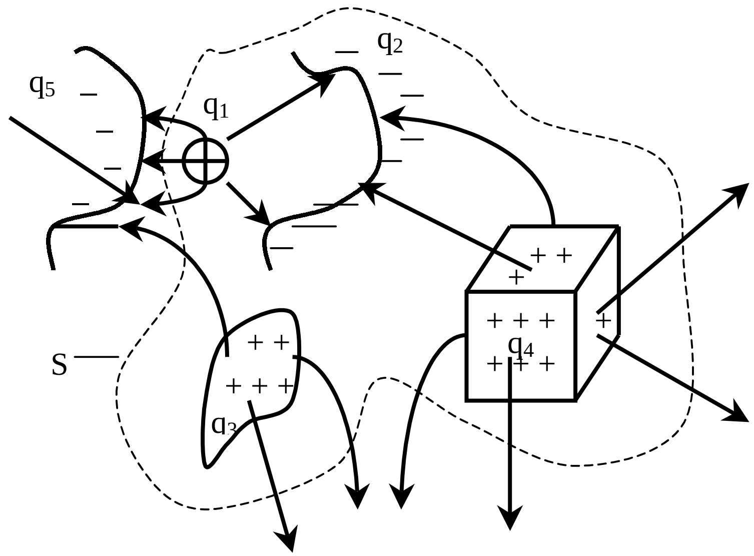
Tačiau tą paviršių kirs visos tos jėgų linijos, kaip ir sferos paviršių S. Tad srautas per abu paviršius S ir S_1 bus vienodas ir lygus q/ε_0. Todėl galėsime užrašyti:

$$\oint_{(S)} E_n dS = \oint_{(S)} \vec{E}d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}. \qquad (23)$$

Imkime bet kokią krūvių sistemą (9 pav.). Joje gali būti taškinių, linijinių, paviršinių bei tūrinių krūvių. Bent dalį tų krūvių apgaubkime bet kokios formos uždaru paviršiumi S.

Tos sistemos mažą krūvį Δq_i galima laikyti taškiniu. Pagal (23) šio krūvio sukurto lauko ΔE_i srautui per paviršių S galima užrašyti:

$$\oint_{(S)} \Delta E_{in} dS = \frac{\Delta q_i}{\varepsilon_0},$$



9 pav.

o visos sistemos sukurtą srautą gausime sumuodami:

$$\sum_i \oint_{(S)} \Delta E_{in} dS = \oint_{(S)} \sum_i \Delta E_{in} dS = \frac{\sum_i \Delta q_i}{\varepsilon_0}.$$

Kadangi pagal superpozicijos principą

$$\sum_i \Delta E_{in} = E_n,$$

o nagrinėjamu atveju

$$\sum_i \Delta q_i = q_1 - q_2 + q_3 + q_4.$$

vadinasi

$$\oint_{(S)} E_n dS = \frac{q_1 - q_2 + q_3 + q_4}{\varepsilon_0}.$$

Krūvis $-q_5$ yra šalia uždaro paviršiaus S, taigi, jo įnašas į srautą lygus nuliui. Todėl šis krūvis sumuojant neįskaitomas.

Apibendrintai Gauso (K. F. Gauss) dėsnį galima taip užrašyti:

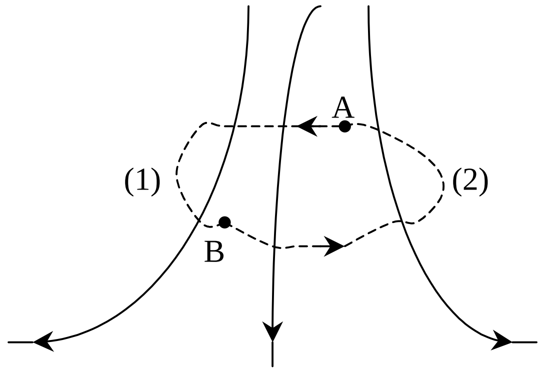
$$\oint_{(S)} E_n dS = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0}, \qquad (24)$$

o žodžiais – taip suformuluoti: **E vektoriaus srautas per bet kokį uždarą paviršių lygus algebrinei sumai krūvių, apgaubtų šiuo paviršiumi, padalytai iš elektrinės konstantos ε_0.**

9. Elektrostatinio lauko potencialas

Potencialu vadinamas laukas, kuriame darbas uždarame kelyje lygus nuliui. Iš mechanikos žinome, kad gravitacinis laukas yra potencialinis. Palyginę Kulono dėsnį su Niutono gravitacijos dėsniu matome, kad jų abiejų pobūdis vienodas. Todėl ir **elektrostatinis laukas yra potencialinis,** t.y. perkeliant krūvį elektrostatiniame lauke uždara trajektorija atliktas darbas lygus nuliui.

Elektrostatiniame lauke imkime bet kuriuos du taškus, pavyzdžiui, A ir B, ir apskaičiuokime darbą, atliekamą perkeliant krūvį q_0 iš taško A į tašką B (10 pav.).



10 pav.

Iš mechanikos kurso žinome, jog darbas

$$A_{AB} = \int_A^B (\vec{F}, d\vec{l}). \qquad (25)$$

Šiuo atveju pagal (5)

$$\vec{F} = q_0 \vec{E}$$

ir

$$A_{AB} = q_0 \int_A^B (\vec{E}, d\vec{l}). \qquad (26)$$

Perkelkime krūvį q_0 iš taško B atgal į tašką A kokiu nors kitu keliu (2). Tada

$$A_{AB} = q_0 \int_B^A (\vec{E}, d\vec{l}). \qquad (27)$$

Sudėję panariui (26) ir (27), apskaičiuojame darbą uždaroje trajektorijoje. Jis turi būti lygus nuliui. Tad

$$A_{AB} = q_0 \int_A^B (\vec{E}, d\vec{l}) + q_0 \int_B^A (\vec{E}, d\vec{l}) = 0.$$

Antrajame integrale sukeiskime vietomis rėžius. Tuomet pasikeis integralo ženklas. Tada užrašysime:

$$q_0\int_A^B(\vec{E},d\vec{l}\,)-q_0\int_A^B(\vec{E},d\vec{l}\,)=0,$$

o iš čia nustatysime, kad

$$A_{AB}=q_0\int_B^A(\vec{E},d\vec{l}\,)=q_0\int_A^B(\vec{E},d\vec{l}\,). \qquad (28)$$

Kadangi 1 ir 2 keliai buvo laisvai pasirinkti, tad remiantis (28) lygybe galima teigti, jog **darbas, atliekamas perkeliant krūvį elektrostatiniame lauke iš vieno taško į kitą, nepriklauso nuo pasirinkto kelio.** Iš (28) taip pat matyti, kad šis darbas yra proporcingas keliamo krūvio q_0 didumui. Taigi šio darbo santykis su krūviu q_0 yra dydis, priklausantis tik nuo lauko savybių bei taškų A ir B padėties. **Dydis, lygus darbo, atliekamo perkeliant teigiamą krūvį elektrostatiniame lauke iš vieno taško į kitą santykiui su keliamojo krūvio dydžiu, vadinamas potencialų skirtumu (įtampa) tarp tų taškų:**

$$U=\frac{A}{q_0}=\int_A^B(\vec{E},d\vec{l}\,). \qquad (29)$$

Potencialų skirtumo SI vienetas yra voltas (V). 1 V = 1 J/1C.

Atliekant darbą, kinta sistemos potencinė energija. Nagrinėjamu atveju sistema susideda iš krūvių, kuriančių lauką ir krūvio q_0. Jei darbą atlieka sistema, potencinė jos energija mažėja, o jei išorinės jėgos – didėja. Todėl darbas gali būti išreikštas kaip sistemos potencinės energijos pokytis:

$$A_{AB}=W_A-W_B, \qquad (30)$$

o potencialų skirtumas

$$U=\frac{W_A}{q_0}-\frac{W_B}{q_0}. \qquad (31)$$

Dydis, lygus potencinės energijos, kurią turi krūvis būdamas tam tikrame lauko taške, ir to krūvio santykiui, vadinamas to lauko taško potencialu φ. Taigi

$$\varphi=\frac{W}{q}. \qquad (32)$$

(31) tada galima taip užrašyti:

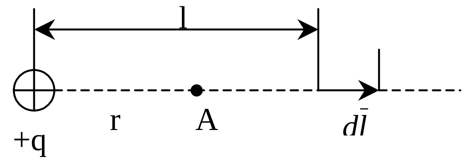
$$U=\varphi_A-\varphi_B. \qquad (33)$$

Akivaizdu, kad potencialo vienetas irgi yra voltas (V).

Būtina pabrėžti, jog potencinės energijos vertės nėra vienareikšmiai apibrėžtos. (Panašiai esti ir mechanikoje. Pavyzdžiui, Žemės traukos lauke esančio kūno potencinės energijos išraiškos mgh skaitinė vertė priklauso nuo to, nuo kurio lygmens matuojamas aukštis h). Kitaip sakant prie potencinių energijų galima pridėti bet kokią laisvai pasirinktą konstantą. Apibrėžtą skaitinę vertę turi tik potencialų skirtumas. Norint, kad potencialo vertės irgi būtų apibrėžtos, reikia pasirinkti, kokio lauko taško potencialą laikysime lygiu nuliui. Iš principo bet kurio lauko taško potencialą galima pasirinkti lygiu nuliui. Aišku, nuo to pasirinkimo priklausys visų kitų lauko taškų potencialų skaitinės vertės. **Dažniausiai sutariama be galo toli nutolusių taškų (begalybės) potencialą laikyti lygiu nuliui.** Tuomet kalbame apie potencialą begalybės atžvilgiu. Taip pat dažnai Žemės potencialas laikomas lygiu nuliui.

10. Taškinio krūvio ir tolydžiai pasiskirsčiusių krūvių potencialas

Apskaičiuokime lauko taško A, nutolusio atstumu r nuo taškinio krūvio q, potencialą (begalybės atžvilgiu) (11 pav.).



11 pav.

Pasinaudosime (33) formule, manydami, kad taškas B yra be galo toli, tad $\varphi_B = \varphi_\infty = 0.$ Tada pasinaudojus (29)

$$\varphi_A = U = \int_{(A)}^{(B)} (\vec{E}, d\vec{l}).$$

Iš daugybės kelių nuo taško A į begalybę pasirinkime integravimą jėgos linija, einančia per tašką A, kuri šiuo atveju yra tiesė. Tada kampas tarp $\vec{E}$ *ir* $d\vec{l}$ lygus nuliui ir $(\vec{E}, d\vec{l}) = Edl$. Lauko stiprį E atstumu nuo krūvio rasime pagal (8), vietoj r įrašę l. Turėsime:

$$\varphi_A = \int_r^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l^2} \cdot dl = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_r^\infty \frac{dl}{l^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Taigi taškų, nutolusių atstumu r nuo taškinio krūvio q , potencialas

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}. \qquad (34)$$

Potencialo ženklas lygus krūvio q ženklui.

Potencialui, kaip ir lauko stipriui, tinka **superpozicijos principas:**

$$\varphi = \sum_i \varphi_i. \qquad (35)$$

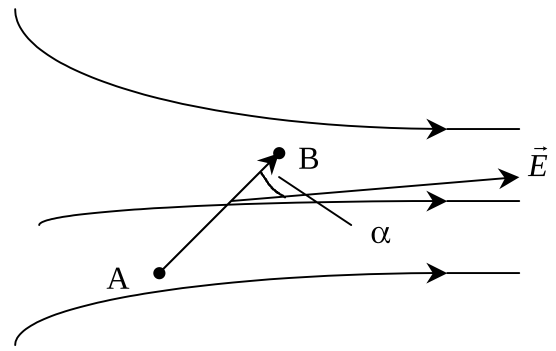
kadangi potencialas yra skaliarinis dydis, (35) formulėje suma yra algebrinė. Todėl krūvių sistemų potencialą apskaičiuoti dažnai būna lengviau nei lauko stiprį. Remdamiesi (35), (34) ir (16) – (18) formulėmis, galime užrašyti formules linijinio, paviršinio ir tūrinio krūvio potencialams begalybės atžvilgiu skaičiuoti:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{(L)} \frac{\tau dl}{r}, \qquad (36)$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{(S)} \frac{\sigma dS}{r}, \qquad (37)$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{(V)} \frac{\rho dV}{r}. \qquad (38)$$

11. Elektrinio lauko stiprio ir potencialo sąryšis



12 pav.

Jei A ir B – du artimi lauko taškai, atstumas tarp jų dl, potencialų skirtumas tarp tų taškų pagal (29):

$$dU = (\vec{E}, d\vec{l}) = Adl\cos\alpha. \qquad (39)$$

Matome, kad potencialų skirtumas priklauso nuo kampo α tarp $\vec{E}$ *ir* $d\vec{l}$, t.y. nuo lauke pasirinktos krypties. Jei pasirinktume $\vec{E} \uparrow\uparrow d\vec{l}$, būtų α = 0, o dU skaitinė vertė šia kryptimi būtų didžiausia, nes cos0 = 1. Taigi potencialas sparčiausiai kinta jėgų linijų kryptimi. Kadangi jėgų linijos nuo teigiamųjų krūvių yra nukreiptos neigiamųjų link, o potencialo vertės yra didesnės arčiau teigiamųjų krūvių ir mažesnės arčiau neigiamųjų, galime teigti, kad jėgų linija – tai sparčiausio potencialo mažėjimo kryptis lauke. Šiuo atveju (39) virsta

$$dU = Edl \qquad (40)$$

arba

$$E = \frac{dU}{dl}, \qquad (41)$$

t.y. $\vec{E}$ modulis lygus potencialo išvestinei pagal koordinatę sparčiausio potencialo kitimo erdvėje kryptimi (jėgų linijų kryptimi).

12. Elektrinis laukas erdvėje su laidininkais

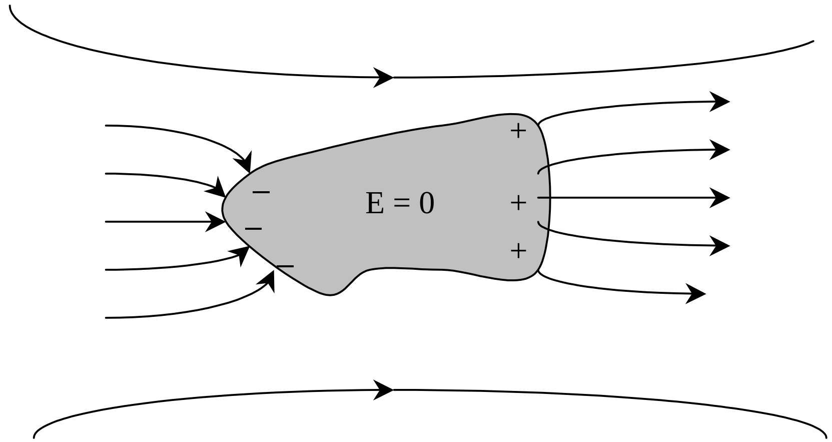
Laidininkai – tai medžiagos, gerai praleidžiančios elektros srovę. Juose esti daug galinčių laisvai judėti elektrintųjų dalelių, vadinamų **krūvininkais.** Metaluose tai yra laisvieji (atitrūkę nuo atomų) elektronai, laidžiuose skysčiuose (elektrolituose) – teigiamieji bei neigiamieji jonai.

Laidininkui patekus į elektrinį lauką, laisvieji krūvininkai jo veikiami ima judėti. Teigiamieji krūvininkai juda lauko kryptimi, o neigiamieji – prieš lauką. Taigi priešingų ženklų krūvininkai yra atskiriami erdvėje. Šis procesas trunka labai trumpai, nes atskirtieji krūvininkai kuria savo elektrinį lauką, nukreiptą prieš išorinį. Kai šis laukas susilygina su išoriniu, atstojamojo lauko laidininke nelieka. Nelieka ir krūvininkus veikiančios jėgos. Geruose laidininkuose, pavyzdžiui, metaluose, išoriniam laukui kompensuoti užtenka laidininko paviršiuje esančių laisvųjų elektronų. Dėl to kompensuojantys lauką krūvininkai būna susitelkę labaiploname (gardelės konstantos matmenų) paviršiniame sluoksnyje. **Paviršinių krūvių atsiradimas laidininko paviršiuje, veikiant išoriniam elektriniam laukui, yra vadinamas elektrostatine indukcija, o tie krūviai – indukuotaisiais krūviais.**

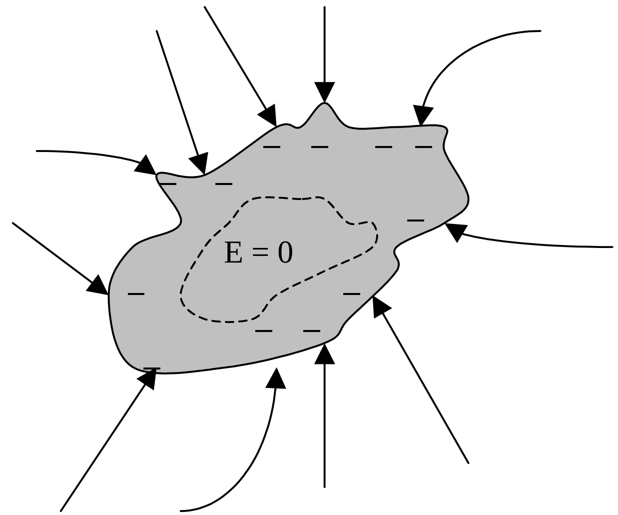
Metaluose laisvai judėti gali tik neigiamieji krūvininkai (laisvieji elektronai). Teigiamieji krūvininkai (jonai) būna tvirtai susikibę gardelės mazguose. Teigiamąjį indukuotąjį krūvį metaluose sudaro tie jonai, kurių aplinkoje nelieka pakankamo kiekio laisvųjų elektronų. Remdamiesi krūvio tvermės dėsniu galime teigti, kad **indukuotųjų krūvių algebrinė suma visada lygi nuliui.**

Panašiai būna ir suteikus metalo gabalui krūvį, t.y. jį įelektrinus. Ir šiuo atveju suteiktas krūvis pasiskirsto tik metalo paviršiuje, o metale lauko nebūna (14 pav.). Visais atvejais prie pat laidininko paviršiaus jėgų linijos turi būti statmenos paviršiui, nes priešingu atveju būtų

lygiagreti su paviršiumi $\vec{E}$ dedamoji. Jai veikiant laisvieji krūvininkai judėtų laidininko paviršiumi, t.y. neturėtume elektrostatikos atvejo.



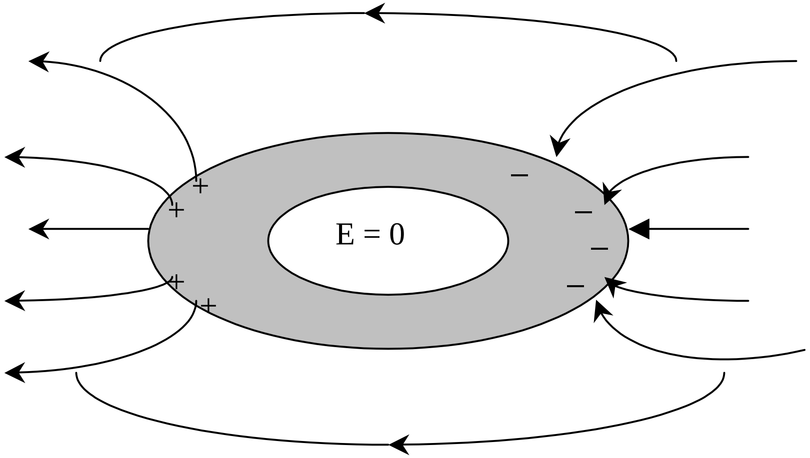
13 pav.



14 pav.

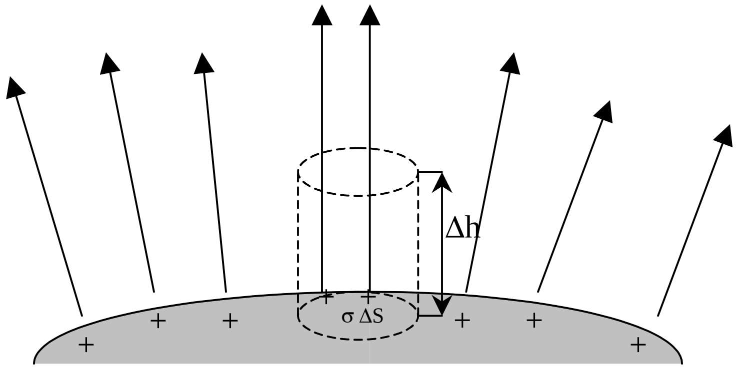
Kadangi laidininke elektrostrostatikos atveju $\vec{E} = 0$, pasinaudojus (41) matyti, kad
U = const, nes konstantos išvestinė yra lygi nuliui. Taigi **visų laidininko taškų potencialas esti vienodas.** Todėl galime kalbėti apie laidininko potencialą nenurodydami, apie kurio jo taško potencialą kalbame.

Laidininko tūryje imkime bet kokį uždarą paviršių (14 pav. pažymėta punktyru). Jį kertantis $\vec{E}$ srautas lygus nuliui, nes laidininke nėra lauko. Pagal Gauso dėsnį (23) nustatome, jog ir krūvis, esantis tuo paviršiumi apgaubtame tūryje, taip pat turi būti lygus nuliui. **Elektrostatikos atveju laidininko tūris yra neutralus.** Jei tą tūrį pašalintume, laidininke atsirastų ertmė, o krūvių pasiskirstymas laidininko paviršiuje bei laukas šalia laidininko nepakistų. Ertmėje taip pat neatsirastų. Taigi norint kokį nors tūrį apsaugoti nuo išorinių elektrostatinių laukų, reikia jį apgaubti bet kokio storio laidžiu (metaliniu) apvalkalu. Toks apvalkalas vadinamas **elektrostatiniu ekranu** (15 pav.).



15 pav.

Nustatysime sąryšį tarp paviršinio krūvio tankio laidininko paviršiuje ir lauko stiprio prie to paviršiaus. Mažą paviršiaus plotelį ΔS su krūviu σΔS apgaubkime stačiuoju cilindru, kurio vienas pagrindas yra šalia laidininko, nutolęs nuo jo mažu atstumu Δh, o kitas – laidininke (16 pav.).



16 pav.

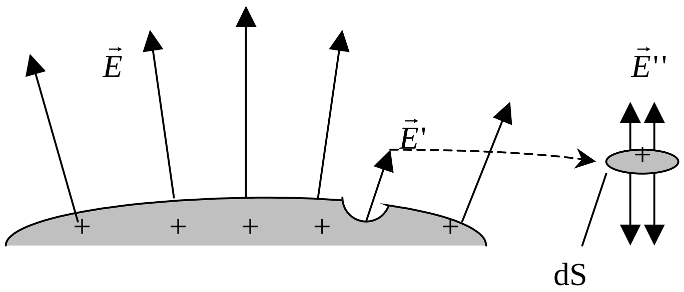
Kadangi jėgų linijos statmenos laidininko paviršiui, o laidininko viduje E = 0, srautas per cilindro paviršių bus lygus srautui per šalia laidininko esantį pagrindą. Pagal Gauso dėsnį:

$$E\Delta S = \frac{\sigma \Delta S}{\varepsilon_0}.$$

Iš čia gauname:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \qquad (42)$$

Apskaičiuosime, kokia jėga mažą laidininko paviršiaus plotelį dS su krūviu σdS veikia kitų krūvių, esančių ir to paties laidininko likusiame paviršiuje, ir šalia laidininko (jei tokių krūvių yra), laukas. Norėdami surasti to lauko stiprį E’, mintyse pašalinkime iš metalo paviršiaus plotelį dS su krūviu dq = σdS (17 pav.).



17 pav.

Bet kokios formos mažą plotelį galime laikyti plokščiu, tad tame plotelyje esančių krūvių sukurtą lauką E’’ galime skaičiuoti pagal plokštumos sukurto lauko (72) formulę (žr. 1 uždavinį):

$$E''=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Lauko stiprį E’ apskaičiuojame iš lauko E (žr. (42) atėmę E’’):

$$E'=E-E''=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Tad jėgos, veikiančios plotelį dS, modulis

$$dF=E'dq=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cdot\sigma dS=\frac{\sigma^2 dS}{2\varepsilon_0}. \qquad (43)$$

Ši jėga nukreipta statmenai į paviršių ir sukelia įtempimą

$$p=\frac{dF}{dS}=\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}. \qquad (44)$$

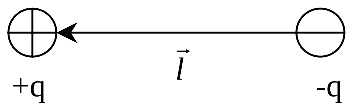
Vektoriškai (43) galima taip užrašyti:

$$d\vec{F}=\frac{\sigma^2 dS}{2\varepsilon_0}\cdot\vec{n}. \qquad (45)$$

čia $\vec{n}$ - paviršiaus normalės vienetinis vektorius. Norint rasti baigtinio ploto paviršių veikiančią jėgą, reikia integruoti (45).

13. Elektrinis laukas dielektrikuose. Dielektrinė skvarba

Dielektrikuose nėra laisvųjų krūvininkų, galinčių veikiant laukui judėti mikroskopiniais atstumais. Dielektriką sudarančios molekulės yra neutralios, tačiau sudarytos iš elektrintųjų dalelių – protonų ir elektronų, įeinančių į atomų struktūras. Dielektrike sudarius elektrinį lauką atsiranda jėgų, veikiančių teigiamuosius krūvius lauko kryptimi, o neigiamuosius – prieš lauko kryptį. Šioms jėgoms veikiant molekulės šiek tiek pakinta, nes į jų sudėtį įeinančios elektrintosios dalelės truputį paslenka, dėl to molekulių teigiamų ir neigiamų krūvių centrai nebesutampa. Sakoma, kad molekulės tampa **dipoliais.** Paprasčiausias yra **taškinis dipolis,** kurį sudaro du lygių modulių, bet priešingų ženklų taškiniai krūviai +q ir –q, atstumas tarp kurių yra l (18 pav.).



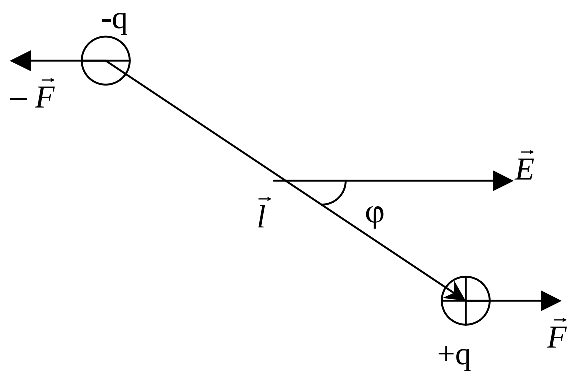
18 pav.

Pagrindinė dipolio charakteristika yra jo **elektrinis dipolinis momentas** p = ql. Jo SI vienetas yra 1 C·m. Sutarta atstumą tarp krūvių l laikyti vektoriumi, kurio kryptis yra **nuo neigiamo krūvio į teigiamą** (18 pav.). Tuomet elektrinio dipolinio momento vektorius

$$\vec{p}=q\vec{l}. \qquad (46)$$

Išoriniame vienalyčiame elektriniame lauke esantį dipolį veikia jėgų pora, kurios momento modulis

$$M=pE\sin\varphi. \qquad (47)$$

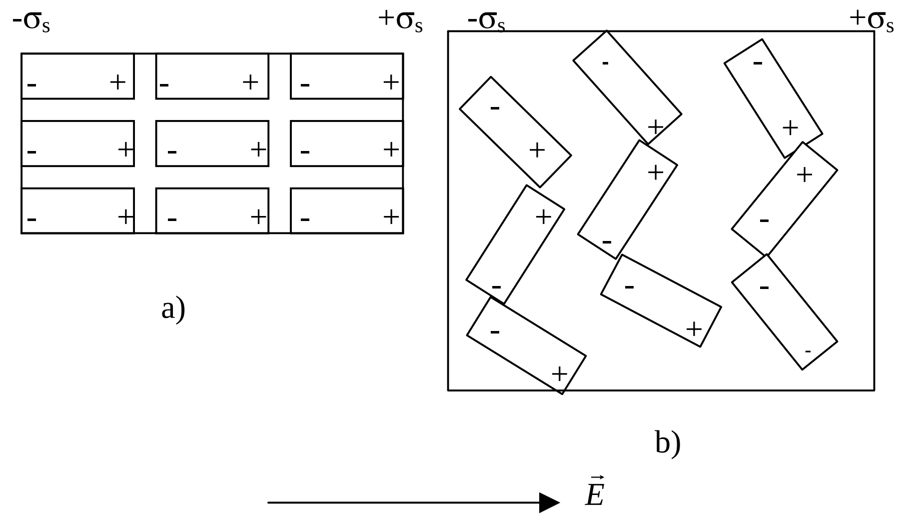


19 pav.

Jam veikiant dipolis stengiasi pasisukti taip, kad jo dipolinis momentas būtų lygiagretus su išorinio lauko stiprio vektoriumi $\vec{E}$ (19 pav.). Čia φ - kampas tarp vektorių $\vec{E}$ ir $\vec{p}$.

Yra dviejų rūšių dielektrikai. Vienų dielektrikų molekulės nėra bipoliai kol nėra išorinio elektrinio lauko (tai **nepoliniai dielektrikai)**, o kitų dielektrikų molekulės esti dipoliai ir be išorinio lauko (tai **poliniai dielektrikai)**. Nepoliniam dielektrikui patekus į elektrinį lauką, molekulės tampa dipoliais, kurių dipoliniai momentai orientuoti lauko kryptimi (20 pav., a). Esant poliniam dielektrikui laukas stengiasi orientuoti jo molekulių dipolinius momentus lygiagrečiai su lauku. Jam trukdo šiluminis judėjimas, todėl pasiekiama tik dalinė (paprastai visai nedidelė) orientacija (20 pav., b).

Ir vienu, ir antru atveju atsiranda paviršiniai krūviai, kurie vadinami **susietaisiais krūviais.** Jų paviršinis tankis 20 pav. pažymėtas σ_s. O tūryje esant vienalyčiams dielektrikams krūvių nesusidaro, nes dipoliai vienas į kitą atsukti priešingų ženklų krūviais. **Susietųjų krūvių atsiradimas dielektriko paviršiuje vadinamas dielektrikų poliarizacija.** Susietieji krūviai kartais vadinami poliarizaciniais krūviais. Susietieji paviršiniai krūviai sukuria savo elektrinį lauką



20 pav.

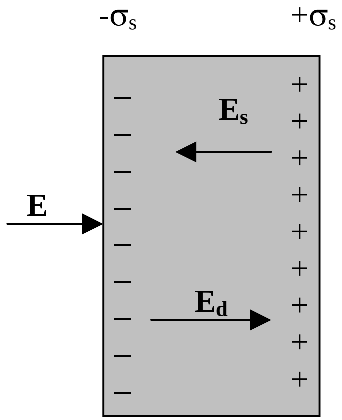
$\vec{E}_s$, nukreiptą prieš išorinį lauką $\vec{E}$. Dėl to laukas dielektrike $\vec{E}_d$ susilpnėja, nes $\vec{E}_d = \vec{E} + \vec{E}_s$, o modulis $E_d = E - E_s$. Kiek kartų laukas dielektrike silpnesnis negu už jo, priklauso nuo dielektriko medžiagos. Šiam susilpnėjimui apibūdinti įvedamas dydis, vadinamas **dielektrine skvarba.** Tegu dielektrikas yra plokštės formos, o išorinis laukas $\vec{E}$ statmenas tai plokštei (21 pav.). Tada susietųjų krūvių dielektrike sukurtą lauką $\vec{E}_s$, galima skaičiuoti kaip dviejų plokštumų su paviršiniais krūvio tankiais $+\sigma_s$ ir $-\sigma_s$ laukų geometrinę sumą. Pagal (72) formulę (žr. 1 uždavinį)

$$E_s = \frac{\sigma_s}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_s}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma_s}{\varepsilon_0}.$$

Lauko stipris dielektrike

$$E_d = E - E_s = E - \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \qquad (48)$$

Santykis $\varepsilon = \dfrac{E}{E_d}$, (49)

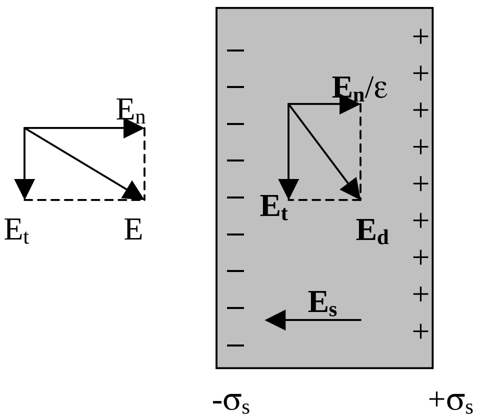


21 pav.

esant statmenam jėgų linijų kritimui į dielektriką, vadinamas dielektriko dielektrine skvarba. Taigi dielektrinė skvarba rodo, kiek kartų elektrinio lauko stiprio statmenoji dielektriko paviršiui dedamoji dielektrike yra mažesnė negu už jo. Iš (48) ir (49) galime gauti sąryšius tarp ε, σ_s ir E bei E_d:

$$\sigma_s = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)}{\varepsilon} \cdot E = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E_d.$$

Jei išorinio lauko jėgų linijos nėra statmenos dielektriko paviršiui, ε kartų sumažėja tik statmenoji dedamoji E_n, o lygiagrečioji dedamoji E_t išlieka nepakitusi (22 pav.). Dėl to šiuo atveju dielektrike laukas susilpnėja mažiau negu ε kartų ir atsiranda jėgų linijų lūžimas pereinant dielektriko paviršius.



22 pav.

Dėl susietųjų (poliarizacinių)krūvių įtakos dielektrike susilpnėja ir dviejų taškinių krūvių sąveikos jėga. Taigi Kulono dėsnio (4) formulę, jei abu krūviai yra dielektrike, reikia

taip užrašyti: $\vec{F} = \dfrac{q_1 q_2 \vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^3}$. (50)

Pakinta ir kitos formulės, pavyzdžiui, (7), (23) ir kt. Jose vietoj ε_0 reikia rašyti $\varepsilon\varepsilon_0$.

14. Elektrinė talpa. Kondensatoriai

<u>Pavienio laidininko</u> elektrine talpa C vadinamas dydis, kurio skaitinė vertė lygi laidininko krūvio q ir jo potencialo santykiui:

$$C = \frac{q}{\varphi}. \qquad (51)$$

Elektrinės talpos SI vienetas yra **faradas** (F), 1F = 1C/V.

Elektrinė talpa priklauso nuo laidininko formos bei matmenų. Lengva apskaičiuoti laidaus rutulio talpą. Suteikime R spindulio laidžiam rutuliui krūvį q. Jis tolygiai pasiskirstys visame rutulio paviršiuje. Skaičiuokime rutulio centro potencialą, nes bet kokio jo taško potencialas bus toks pat. Pasinaudokime (36) formule. Kadangi centrui r = R = const., jį iškelkime prieš integralo ženklą. Gausime:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R} \oint_{(S)} \sigma dS.$$

Bet

$$\oint_{(S)} \sigma dS = q,$$

tad

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

Rutulio talpa

$$C = \frac{q}{\varphi} = 4\pi\varepsilon_0 R. \qquad (52)$$

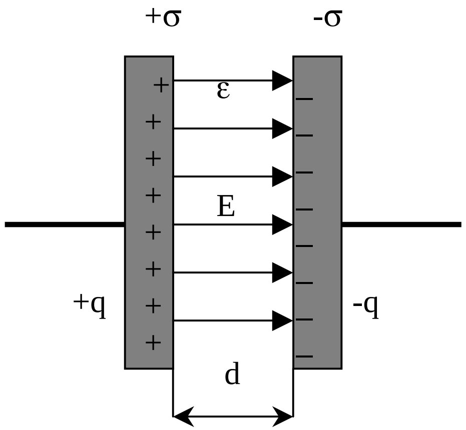
Kitokios formos pavienių laidininkų elektrinę talpą sunku, o dažnai ir neįmanoma analiziškai apskaičiuoti. Be to, pavienių laidininkų talpos būna labai mažos. Pavyzdžiui, R = 1 m spindulio rutulio talpa, apskaičiuota pagal (52) formulę, lygi 111pF, Žemės rutulio (R=6400km) – C=711 μF.

Kur kas didesnę talpą gali turėti kondensatoriai. **Kondensatorius – tai dviejų laidininkų sistema, kurioje jėgų linijos, išeinančios iš vieno laidininko, pasibaigia antrajame.** Pagal laidininkų formą kondensatoriai skirstomi į **plokščiuosius, sferinius ir cilindrinius.** Kondensatorių sudarantys laidininkai dažnai vadinami plokštelėmis, nors jie gali būti sferos ar cilindrai. Tarp plokštelių gali būti oras ar vakuumas (jų $\varepsilon \approx 1$)arba bet koks dielektrikas. Įelektrinant kondensatorių jo plokštelėms suteikiami lygių modulių priešingų ženklų krūviai +q ir –q. **Kondensatoriaus elektrine talpa vadinamas dydis, lygus vienos plokštelės krūvio ir potencialų skirtumo tarp plokštelių santykio moduliui:**

$$C = \left|\frac{q}{U}\right|. \qquad (53)$$

Apskaičiuosime įvairių kondensatorių talpas.

Plokščiąjį kondensatorių sudaro dvi lygiagrečios laidžios plokštės, kurių kiekvienos plotas S ir atstumas tarp jų d. Tarpas tarp plokštelių užpildytas dielektriku, kurio dielektrinė skvarba ε (23 pav.). Laukas tokiame kondensatoriuje toli nuo kraštų vienalytis. Jo stipris



23 pav.

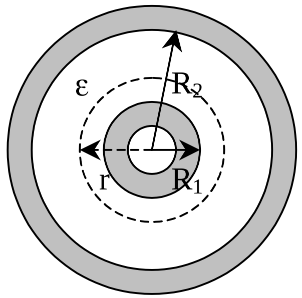
$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0 S},$$

o potencialų skirtumas

$$U = Ed = \frac{qd}{\varepsilon\varepsilon_0 S}.$$

Talpa

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}. \qquad (54)$$



24 pav.

Sferinį kondensatorių sudaro dvi koherentinės metalinės sferos, kurių spinduliai R_1 ir R_2, dielektriko tarp jų dielektrinė skvarba ε (24 pav.).

Lauko stipris dielektrike r atstumu nuo centro lengvai apskaičiuojamas pagal Gauso dėsnį (23):

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Iš čia

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}.$$

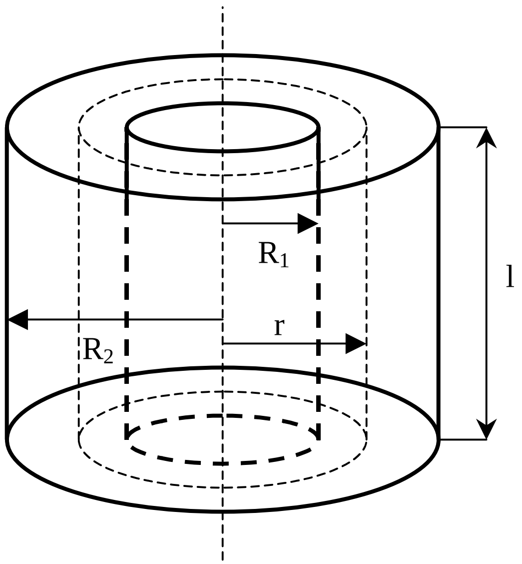
Potencialų skirtumas tarp sferų pagal (29)

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right),$$

o talpa

$$C = \frac{q}{U} = \frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}. \qquad (55)$$

<u>Cilindrinį kondensatorių</u> sudaro du bendraašiai R_1 ir R_2 spindulių laidūs cilindrai, kurių ilgis l. Tarpas tarp jų užpildytas dielektriku, kurio dielektrinė skvarba ε (25 pav.). Apgaubę vidinį cilindrą su krūviu +q įsivaizduojamu l ilgio r spindulio cilindru, pagal (23) turime:



25 pav.

$$E \cdot 2\pi rl = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Iš čia

$$E = \frac{q}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 rl},$$

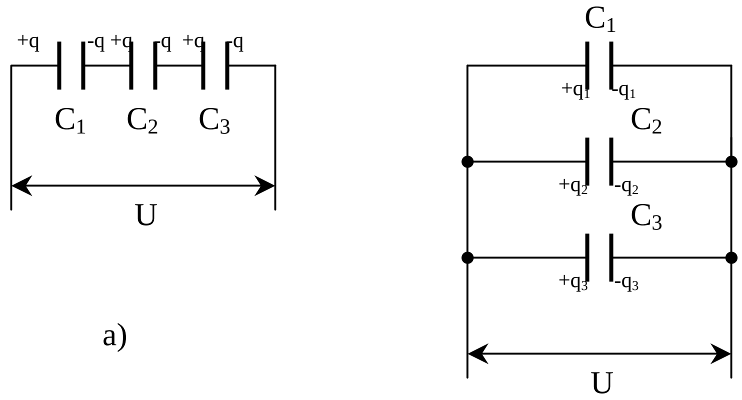
$$U = \int_{R_1}^{R_2} Edr = \frac{q}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l}\cdot \ln\frac{R_2}{R_1}.$$

Talpa $$C = \frac{q}{U} = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l}{\ln\frac{R_2}{R_1}}. \qquad (56)$$

Atkreipkime dėmesį, kad bet kokios formos kondensatoriaus elektrinė talpa proporcinga jo dielektriko dielektrinei skvarbai ε. Taip yra todėl, kad visuose kondensatoriuose elektrinis laukas būna statmenas dielektriko paviršiui. Pažymėkime kondensatoriaus su dielektriku talpą C, o be dielektriko – C_0. Tuomet **dielektrinę skvarbą galima apibrėžti kaip santykį kondensatoriaus talpos su dielektriku ir jo talpos be dielektriko:**

$$\varepsilon = \frac{C}{C_0}. \qquad (57)$$

Turėdami keletą kondensatorių, juos galime jungti nuosekliai arba lygiagrečiai.



a)

b)

26 pav.

Jungiant **nuosekliai** (26 pav., a) krūviai +q ir –q suteikiami tik grandinės kraštinių kondensatorių kraštinėms plokštelėms. Kitose plokštelėse būna tik indukuotieji krūviai, moduliu lygūs indukuojantiesiems krūviams, bet priešingo ženklo, t.y. visi kondensatoriai įsielektrina vienodais krūviais q. Jų įtampos apskaičiuojamos pagal (53) formulę:

$$U_1 = \frac{q}{C_1},\ U_2 = \frac{q}{C_2},\ U_3 = \frac{q}{C_3}.$$

Bendra įtampa

$$U = U_1 + U_2 + U_3$$

ir

$$\frac{1}{C} = \frac{U}{q} = \frac{U_1 + U_2 + U_3}{q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}.$$

Jei grandinėje yra n nuosekliai sujungtų kondensatorių, tokios grandinės talpa apskaičiuojama pagal formulę

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{C_i}. \qquad (58)$$

Jungiant kondensatorius lygiagrečiai, jų visų įtampa būna ta pati, o krūviai

$$q_1 = C_1U,\ q_2 = C_2U,\ q_3 = C_3U.$$

Visos sistemos krūvis

$$q = q_1 + q_2 + q_3 = (C_1 + C_2 + C_3)U.$$

Kadangi pagal (53)

$$q = CU,$$

šiuo atveju

$$C = C_1 + C_2 + C_3.$$

Esant n lygiagrečiai sujungtų kondensatorių

$$C = \sum_{i=1}^{n} C_i\ . \qquad (59)$$

15. Krūvių sąveikos energija

Iš pradžių apskaičiuojame dviejų taškinių krūvių q_1 ir q_2, atstumas tarp kurių r_{12}, sąveikos energiją. Ji lygi darbui, kurį reikia atlikti norint padaryti šią dviejų krūvių sistemą, t.y. priartinti krūvį q_2 iš begalybės iki atstumo r_{12} nuo krūvio q_1. Pagal (32)

$$W = q_2\varphi_2. \qquad (60)$$

Čia φ_2 pažymėtas potencialas taško, į kurį atkeliamas krūvis q_2. Šį potencialą sukuria q_1. Pagal (34)

$$\varphi_2 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}.$$

Taigi dviejų taškinių krūvių sąveikos energiją galima taip užrašyti:

$$W = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}. \qquad (61)$$

Tarę, kad krūvį q_1 keliame prie krūvio q_2, vietoje (60) gautume:

$$W = q_1\varphi_1.$$

Kadangi abu krūviai į energijos formulę įeina simetriškai, (61) galima ir taip užrašyti:

$$W = \frac{1}{2}(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} q_i\varphi_i.$$

Dabar tarkime, kad norime padaryti trijų krūvių sistemą, atkeldami dar trečią krūvį q_3 iš begalybės iki atstumo r_{13} nuo krūvio q_1 ir r_{23} nuo krūvio q_2. Tam reikės papildomo darbo

$$A = q_3\varphi_3.$$

Čia φ_3 – potencialas taško, į kurį atkeliamas krūvis q_3. Tą potencialą sukuria krūviai q_1 ir q_2, tad

$$\varphi_3 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}},$$

$$A = \frac{q_1q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}}. \qquad (62)$$

Trijų taškinių krūvių sistemos energijos išraišką gausime, prie (61) pridėję (62):

$$W = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} + \frac{q_1q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}}. \qquad (63)$$

Jei sistema sudaryta iš n taškinių krūvių, jų sąveikos energiją galima taip užrašyti:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i\varphi_i \qquad (64)$$

arba

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1(k\neq i)}^{n} \frac{q_iq_k}{4\pi\varepsilon_0 r_{ik}}. \qquad (65)$$

(64) formulėje φ_i yra taško, kuriame esti krūvis q_i, potencialas, sukurtas visų sistemos krūvių, išskyrus krūvį q_i. Kadangi krūvis nesąveikauja pats su savimi, (65) formulėje atmetami su vienodais indeksais esantys nariai. Be to, išskleidus (65) dvigubas sumas, nariai

su tais pačiais indeksais įeitų po du kartus, todėl prieš sumų ženklus parašytas daugiklis1/2.

16. Įelektrinto kondensatoriaus energija

Ši energija lygi darbui, kurį turi atlikti kondensatorių įelektrinančios išorinės jėgos. Elektrinkime C talpos kondensatorių teigiamą krūvį be galo mažomis porcijomis, dq' perkeldami iš vienos plokštelės į kitą. Tuo momentu, kai potencialų skirtumas tarp plokštelių yra U', perkeliant krūvį dq' atliekamas darbas (žr. pavyzdžiui, (29))

$$dA = U'dq'.$$

Kadangi pagal (53)

$$U' = \frac{q'}{C},$$

vadinasi,

$$dA = \frac{q'dq'}{C}.$$

Jei kondensatorius buvo įelektrintas iki krūvio q,

$$W = A = \int_0^q \frac{q'dq'}{C} = \frac{q^2}{2C}. \qquad (66)$$

Pasinaudoję sąryšiu tarp krūvio ir potencialų skirtumo (žr. (53)), kondensatoriaus energiją galime ir taip išreikšti:

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{qU}{2}. \qquad (67)$$

(66) ir (67) formulės tinka ir pavieniam laidininkui. Tuo atveju vietoje potencialų skirtumo U reikia įrašyti laidininko potencialą φ.

17. Elektrostatinio lauko energija ir energijos tankis

Išreikškime plokščiojo kondensatoriaus energiją per lauko stiprį E tarp jo plokštelių. Pasinaudoję plokščiojo kondensatoriaus talpos išraiška (54), (67) galime taip užrašyti:

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 SU^2}{2d} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 SdU^2}{2d^2}.$$

Kadangi U/d = E, o Sd = V – tarp plokštelių esantis tūris, tai

$$W = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}\cdot V. \qquad (68)$$

Iš (68) matyti, kad kondensatoriaus energija proporcinga tūriui tarp plokštelių, t.y. tūriui, kuriame yra kondensatoriaus laukas. Galime manyti, kad **energija yra sutelkta toje erdvės dalyje, kurioje yra laukas, o ne ten, kur yra krūviai.** (Šiuo atveju krūviai yra plokštelėse). Šį teiginį galutinai patvirtina elektromagnetinių bangų energijos tyrimai. Elektromagnetinę bangą sudaro elektrinis (tiesa, ne elektrostatinis) ir magnetinis laukai, sklindantys be krūvių. Elektromagnetinės bangos energiją sudaro tų abiejų laukų energija (jos abi lygios tarpusavy).

Įvedama **elektrinio lauko energijos tūrinio tankio** sąvoka. Tai **energija, tenkanti vienetiniam tūriui elektriniame lauke:**

$$u = \frac{W}{V} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}. \qquad (69)$$

Energijos tūrinio tankio SI vienetas yra 1J/m^3. Atkreipkime dėmesį, kad 1J/m^3 =
= 1 N/m^2 = 1 Pa, t.y. energijos tūrinio tankio dimensija sutampa su slėgio dimensija. Šis sutapimas nėra atsitiktinis. Pavyzdžiui, laidininką veikiantis įtempimas (žr.(44)), pasinaudojus (42), gali būti taip išreikštas:

$$p = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = u,$$

t.y. įtempimas lygus tūriniam elektrinės energijos tankiui prie laidininko paviršiaus.

Nevienalyčiame lauke (69) reikia taip užrašyti:

$$u = \frac{dW}{dV} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}. \qquad (70)$$

Tuo atveju energija, sutelkta be galo mažame tūryje dV

$$dW = udV = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} \cdot dV,$$

o energija, sutelkta visame tūryje, gaunama integruojant:

$$W = \int_{(V)} udV = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{(V)} \varepsilon E^2 dV. \qquad (71)$$

Kaip pavyzdį apskaičiuokime krūviu q įelektrinto R spindulio pavienio metalinio rutulio, esančio ore ($\varepsilon \approx 1$) energiją. Lauko stipris šalia rutulio r atstumu nuo jo centro

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Energija, esanti r spindulio dr storio sferiniame sluoksnyje, kurio tūris $dV = 4\pi r^2 dr$,

$$dW = udV = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \cdot dV = \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{q^2 dr}{8\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Kadangi rutulio talpa pagal (52) C = $4\pi\varepsilon_0$R, energiją galima taip užrašyti: $$W = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} = \frac{q^2}{2C}.$$

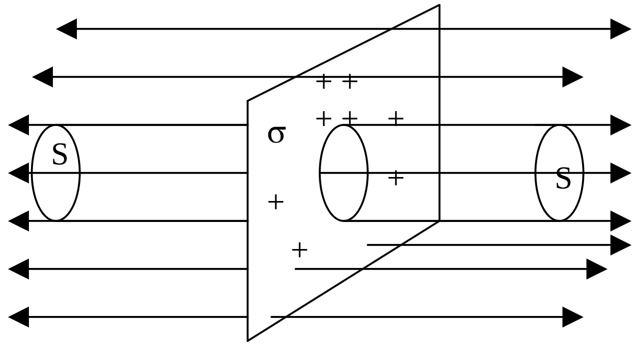
Tai sutampa su (66) formule.

18. Uždavinių sprendimo pavyzdžiai

1 uždavinys. Raskite elektrinio lauko stiprį šalia begalinės plokštumos, įelektrintos pastovaus σ paviršinio tankio krūviu.

Sprendimas

Pritaikysime Gauso dėsnį. Iš simetrijos išplaukia, jog šiuo atveju $\vec{E}$ linijos iš kiekvieno plokštumos taško išeina statmenai plokštumai į abi puses ir eina į begalybę. (27 pav.).



27 pav.

Be to, linijų tankis visur vienodas (vienalytis laukas). Imkime skritulio formos plokštumos dalį, kurios plotas S, ir apgaubkime bet kokio ilgio cilindru, kurio aukštinė statmena plokštumai. Srautą per cilindro paviršių lengva surasti: jis bus lygus srautų per abu cilindro pagrindus sumai, nes $\vec{E}$ linijos lygiagretės su šoniniu paviršiumi ir srauto per jį nesukuria. Taigi šiuo atveju

$$\oint_{(S)} E_n dS = 2ES.$$

Cilindru apgaubtas krūvis $\sum_i q_i = \sigma S$. Tad pagal Gauso dėsnį

$$2ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0},$$

iš čia

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \qquad (72)$$

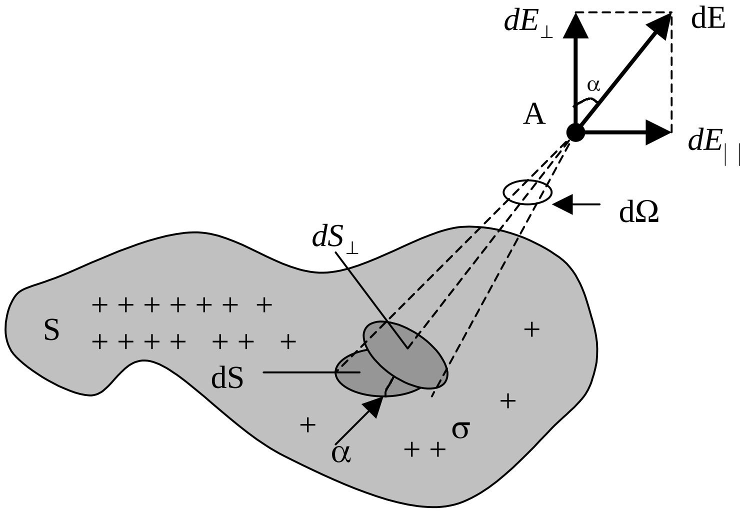
Šį rezultatą, įdėjus kur kas daugiau pastangų, galima gauti ir integruojant, bet Gauso dėsnio pritaikymo nauda yra akivaizdi.

2 uždavinys. Įrodykite, kad bet kokio plokščio paviršiaus S, įelektrinto pastovaus σ paviršinio tankio krūviu, sukurto lauko statmenoji paviršiui dedamoji bet kokiame šalie plokštumos esančiame taške A

$$E_{\perp} = \frac{\sigma\Omega}{4\pi\varepsilon_0}. \qquad (73)$$

Čia Ω - erdvinis kampas, kuriuo iš taško A matomas paviršius S.

Sprendimas



28 pav.

Krūvio $dq = \sigma dS$, esančio mažame plokštumos plotelyje dS, sukurto lauko stipris bet kokiame šalia plokščio paviršiaus esančiame erdvės taške A, nutolusiame nuo dS atstumu r

$$dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\sigma dS}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

o statmenoji dedamoji

$$dE_{\perp} = dE\cos\alpha = \frac{\sigma dS\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Kaip matyti iš 28 pav.,

$$dS\cos\alpha = dS_{\perp}.$$

Čia $dS_{\perp}$ - plotelio dS projekcija į plokštumą, statmeną r. Tačiau pagal erdvinio kampo apibrėžimą

$$d\Omega = \frac{dS_{\perp}}{r^2} = \frac{dS\cos\alpha}{r^2}.$$

Čia dΩ - erdvinis kampas, kuriuo iš taško A matomas plotelis dS. Taigi

$$dE_{\perp} = \frac{\sigma d\Omega}{4\pi\varepsilon_0}.$$

Viso plokščio paviršiaus $E_{\perp}$ apskaičiuojamas integruojant

$$E_{\perp} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int d\Omega = \frac{\sigma\Omega}{4\pi\varepsilon_0}.$$

Gavome (73) formulę. Ypač sėkmingai ji gali būti pritaikyta simetriškiems paviršiams, kai lygiagrečios paviršiui dedamosios nebuvimas paaiškėja iš simetrijos.

3 uždavinys. Penkios kubo sienos įelektrintos σ paviršinio tankio krūviu, o šeštoji – neįelektrinta. Raskite lauko stiprį kubo centre.

Sprendimas

Šiuo atveju laukas kubo centre lygus laukui, sukurtam vienos kubo sienos, esančios priešais neįelektrintą sieną, nes kitų sienų porų laukai kompensuojasi. Be to, iš simetrijos paaiškėja,, kad kubo centre lygiagrečiosios su siena dedamosios būti negali. Tad pagal (73)

$$E = E_{\perp} = \frac{\sigma\Omega}{4\pi\varepsilon_0}.$$

Erdvinis kampas, kuriuo iš kubo centro matoma viena jo siena,

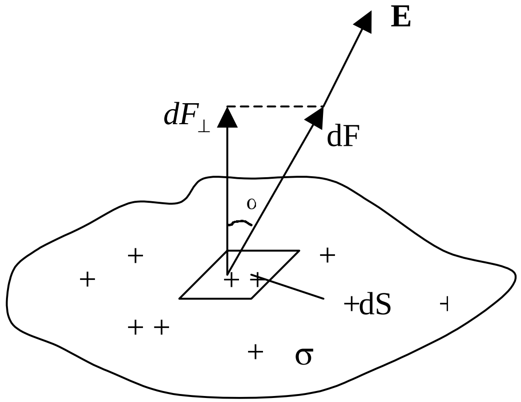
$$\Omega = \frac{4\pi}{6},$$

tad galutinai gauname:

$$E = \frac{\sigma}{6\varepsilon_0}.$$

4 uždavinys. Įrodykite, kad plokščią paviršių S, kurio paviršinis krūvio tankis σ, veikiančios jėgos statmenoji dedamoji $F_\perp = \sigma\Psi$, kur Ψ - srautas, kertantis tą paviršių, sukurtas visų kitų krūvių, išskyrus paviršiuje S esančius krūvius.

Sprendimas



29 pav.

Paviršiuje S išskirkime mažą plotelį dS. Jei tas plotelis yra lauke **E**, ją veikia jėga

$$dF = dq \cdot E = \sigma E dS,$$

o tos jėgos statmenoji paviršiui dedamoji

$$dF_\perp = dF\cos\alpha = \sigma E\cos\alpha \cdot dS.$$

Kadangi

$$E\cos\alpha \cdot dS = E_n dS = d\Psi$$

yra srautas, kertantis plotelį dS,

$$dF_\perp = \sigma d\Psi,$$

o visą plotą veikiančios jėgos statmenoji dedamoji

$$F_\perp = \sigma\Psi. \qquad (74)$$

5 uždavinys. Kubo kurio briauna L, sienos įelektrintos pastovaus σ paviršinio tankio krūviu. Apskaičiuokite jėgą, veikiančią kurią nors vieną jo sieną.

Sprendimas

Ieškomoji jėga $F = F_\perp = \sigma\Psi$,

nes iš simetrijos matyti, kad kitų jėgos dedamųjų būti negali. Čia Ψ - srautas, sukurtas krūvių, esančių penkiose sienose, kertantis nagrinėjamąją šeštąją sieną. Apgaubkime kubą šiek tiek didesniu įsivaizduojamu kubu. Srautas, kertantis visas šešias to gaubiančiojo kubo sienas, pagal Gauso dėsnį $\Psi_1 = \dfrac{q}{\varepsilon_0} = \dfrac{6\sigma L^2}{\varepsilon_0}$,

o vieną nagrinėjamą sieną $\Psi_2 = \dfrac{\Psi_1}{6} = \dfrac{\sigma L^2}{\varepsilon_0}$.

Į Ψ_2 įeina ir pačios nagrinėjamosios sienos krūvių sukurtas srautas (pažymėkime jį Ψ_3), kurį reikia atimti. Kadangi laukas prie pat įelektrintos plokštumos yra statmenas tai plokštumai,

$$\Psi_3 = E_3 S = E_3 L^2.$$

Čia E_3 – nagrinėjamoje sienoje esančių krūvių sukurtas laukas. Pagal (72) $E_3 = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$,

tad $\Psi_3 = \dfrac{\sigma L^2}{2\varepsilon_0}$.

Taigi $\Psi = \Psi_2 = \Psi_3 = \dfrac{\sigma L^2}{\varepsilon_0} - \dfrac{\sigma L^2}{2\varepsilon_0} = \dfrac{\sigma L^2}{2\varepsilon_0}$,

ir galutinai gauname $F = \dfrac{\sigma^2 L^2}{2\varepsilon_0}$.

Pastaba: ši informacija interneto svetainėje www.olimpas.lt skelbiama nuo 2004 04 20.