Vincas Kaminskas, Jonas Algirdas Martišius

KINEMATIKA

Paskaitų konspektas
ypatingai gabių mokinių
papildomojo ugdymo mokyklos
„Fizikos Olimpas“ moksleiviams

Mokykla FIZIKOS OLIMPAS
Vilnius, 2000

UDK 531(075.3)
Ki-105

Dėkojame ypatingai gabių mokinių papildomojo ugdymo mokyklos „Fizikos Olimpas“ steigėjų tarybos pirmininkui P. Jonušui už iniciatyvą ir rūpestį leidžiant šį leidinį.

Recenzavo profesorius Kazimieras Pyragas

ISBN 9986-778-09-3

KINEMATIKA

Kinematika yra mechanikos dalis. **Mechanika** – fizikos šaka, tirianti kūnų mechaninį judėjimą. Mechaninis judėjimas – tai kūnų arba jų dalių padėties kitimas erdvėje ir laike (laikui bėgant). Pavyzdžiui, dangaus kūnų judėjimas, skraidymo aparatų ir transporto priemonių žemėje judėjimas, įvairių mašinų ir mechanizmų dalių judėjimas, Žemės plutos, įvairių kūnų, molekulių virpesiai bei kitoks judėjimas, įvairių konstrukcijų elementų deformacijos, skysčių ir dujų judėjimas. Pats žodis mechanika kilęs iš graikiško „mechanike“, reiškiančio įrankį, statinį. Mechanikos terminą pradėjo vartoti graikų mokslininkas Aristotelis, gyvenęs 384 – 322 m.pr.Kr.

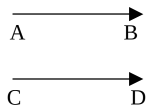
Mechanika skirstoma į **statiką**, kuri tiria jėgų veikiamų kūnų pusiausvyrą, **dinamiką**, kuri tiria jėgų veikiamų kūnų judėjimą ir **kinematiką**, kuri tiria kūnų judėjimo geometrines savybes – taškų arba kūnų įvairias trajektorijas, greičius, pagreičius, besisukančių kūnų kampinius greičius ir atskaitos pagreičius, taškų ir kūnų sudėtinį judesį, t.y. judesį judančios atskaitos sistemos atžvilgiu, taip pat tiria minėtų deformuojamųjų kūnų savybes. Tačiau kinematika neatsižvelgia į kūnų masę ir juos veikiančias jėgas, tų sąvokų visai neliečia. Kinematikos terminas kilęs iš graikiško „kinema“, reiškiančio judėjimą.

Paprasčiausius kinematikos ir dinamikos uždavinius sprendė jau minėtas Aristotelis, taip pat graikų mokslininkas K. Ptolemėjus, gyvenęs 90 – 168 metais. Mokslinius statikos pradmenis sukūrė dar vienas graikų mokslininkas Archimedas, gyvenęs 287 – 212 m.pr.Kr. Vėliau mechaniką kūrė daugelis kitų mokslininkų. Mes mechaniką pradedame aiškinti nuo kinematikos, kaip tai šiuo metu daroma ir vid. mokyklose.

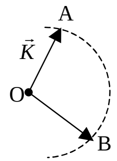
I. PAGRINDINĖS VEKTORIŲ SAVYBĖS

1.1 Vektoriai

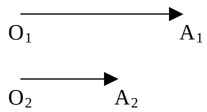
Fizikos mokslas nagrinėja įvairius fizikinius dydžius. Tai masė, laikas, tūris, greitis, jėga, pagreitis, energija, judesio kiekis ir kt. Masę, laiką, tūrį, energiją galima nusakyti, nurodant tik jų skaitines vertes ir matavimo vienetus. Tokie dydžiai vadinami skaliarais.



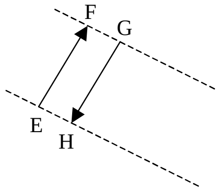
1 pav.



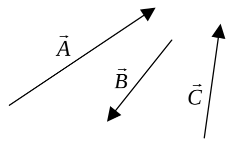
2 pav.



3 pav.



4 pav.



5 pav.

Nustatant greitį, pagreitį, judesio kiekį, reikia nurodyti ir jų kryptį erdvėje. Mat, jeigu du vienodus kūnus veiks vienodo didumo, bet skirtingų krypčių jėgos, tai tie kūnai judės nevienodai. Jų pagreičiai bus skirtingų krypčių, skirsis ir greičiai. Tokie dydžiai vadinami **vektoriais.**

Vektorių patogu vaizduoti rodykle, kurios ilgis lygus vektoriaus didumui, o kryptis nurodo vektoriaus kryptį. Pvz., vektorius $\overrightarrow{AB}$ nukreiptas iš taško A į tašką B (1 pav.). Jo didumas lygus atkarpai AB. Vektoriaus didumas visada yra teigiamas ir vadinamas dar absoliutiniu didumu arba moduliu. Trumpumo dėlei vektoriaus absoliutinį didumą mes ir toliau vadinsime didumu.

Tašką A galima vadinti vektoriaus pradžia, o tašką B – jo galu.

Du vektoriai, kurie yra vienodo didumo, bet skirtingų krypčių (2 pav.), arba kurie yra tos pačios krypties, bet skirtingų didumų (3 pav.), nėra tarp savęs lygūs. Pvz., $\overrightarrow{OA} \neq \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{O_1A_1} \neq \overrightarrow{O_2A_2}$.

Jeigu vektorių $\overrightarrow{OA}$ pažymėsime raide $\vec{K}$, tai jo didumą galima žymėti $|\overrightarrow{OA}|$ arba K. Jeigu du vektoriai yra vienodo didumo, bet skirtingų krypčių, tai jie skiriasi ženklu. Pvz., $\overrightarrow{GH} = -\overrightarrow{EF}$, $|\overrightarrow{GH}| = |\overrightarrow{EF}|$ (4 pav.).

Du vektoriai yra lygūs, jeigu yra lygūs jų didumai ir vienodos kryptys. Pvz., $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. (1pav.).

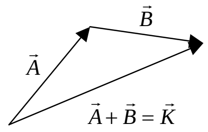
Bendruoju atveju du arba daugiau vektorių gali būti bet kokių krypčių ir didumų. Pvz., vektoriai $\vec{A}, \vec{B}$ ir $\vec{C}$ (5 pav.). Jie gali būti ir ne vienoje plokštumoje.

Vektoriai, kurių pradžią galima perkelti į bet kurį erdvės tašką (nekeičiant vektoriaus didumo ir krypties), vadinami **laisvaisiais** vektoriais. Yra vektorių, kurių pradžią galima kelti tik išilgai

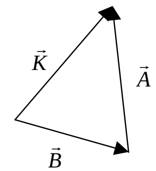
tam tikros tiesės, o taip pat ir tokių, kurių pradžios keisti visai negalima. Toliau kalbėsime daugiausia tik apie laisvuosius vektorius.

1.2 Vektorių sudėtis, atimtis, skaidymas

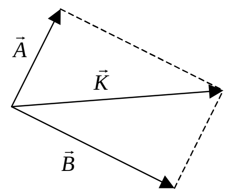
Kaip žinome iš fizikos vadovėlio, sudedant du vektorius $\vec{A}$ ir $\vec{B}$, reikia vektoriaus $\vec{B}$ pradžią sutapatinti su vektoriaus $\vec{A}$ galu. Jų suma, arba atstojamoji, yra vektorius, kurio pradžia yra vektoriaus $\vec{A}$ pradžia, o galas – vektoriaus $\vec{B}$ galas (6 pav.).
$\vec{A}$



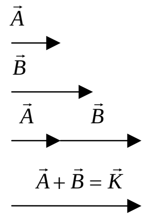
6 pav.



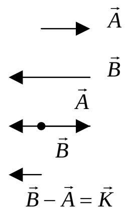
7 pav.



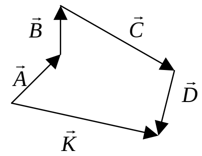
8 pav.



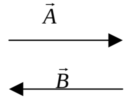
9 pav.



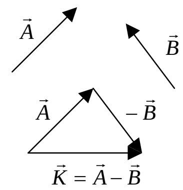
10 pav.



11 pav.

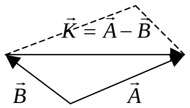


12 pav.

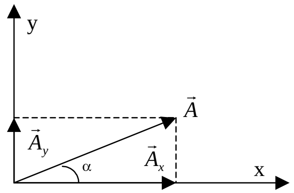


13 pav.

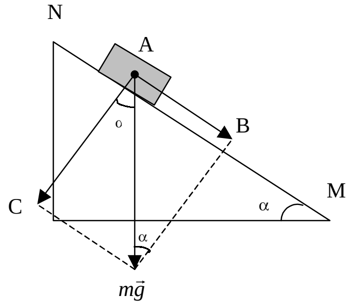
Pažymėję atstojamąjį vektorių $\vec{K}$, galime rašyti, kad $\vec{A} + \vec{B} = \vec{K}$. Tą pačią atstojamąją $\vec{K}$ gausime, sukeitę vektorius $\vec{A}$ ir $\vec{B}$ vietomis (7 pav.). Tai gerai matyti, nubrėžus lygiagretainį, kurio kraštines sudaro vektoriai $\vec{A}$ ir $\vec{B}$, (priešingos kraštinės yra lygios) (8 pav.). Vektorių suma $\vec{K}$ dabar yra lygiagretainio įstrižainė. Todėl dažnai sakoma, kad vektoriai sudedami pagal lygiagretainio taisyklę.



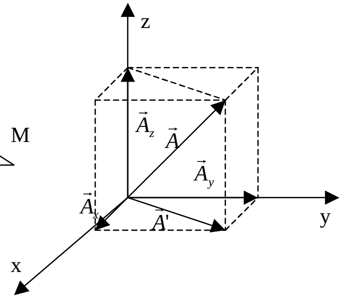
14 pav.



15 pav.



16 pav.



17 pav.

Tačiau toji taisyklė neturi prasmės tada, kai reikia sudėti lygiagrečius vektorius, ir mažiau patogi, kai reikia sudėti tris ir daugiau vektorius. Lygiagrečių vektorių sudėtis parodyta 9 ir 10 pav. Žiūrint į 10 pav., galime sakyti, kad priešingų krypčių vektorių atstojamoji nukreipta didesniojo vektoriaus kryptimi, o jos didumas lygus sudedamų vektorių didumų skirtumui.

11 pav. parodyta didesnio skaičiaus vektorių suma: $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{D}=\vec{K}$. Sudedami vektoriai $\vec{A},\vec{B},\vec{C},\vec{D}$ gali negulėti vienoje plokštumoje, t.y. nubrėžtas daugiakampis gali nebūti plokščias. Jei paskutinio vektoriaus $\vec{D}$ galas sutaptų su pirmojo vektoriaus $\vec{A}$ pradžia, tai gautume $\vec{K}$=0 nepriklausomai nuo to, kiek vektorių besudėtume. Paprasčiausiais atvejais bus, sudedant vektorių $\vec{A}$ ir vektorių $\vec{B}$= - $\vec{A}$ (12 pav.):

$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{K}=\vec{A}-\vec{A}=0. \qquad (1)$$

Gavome, kad dviejų vienodo didumo ir priešingų krypčių vektorių suma (atstojamoji) lygi nuliui.

Iš to, kas parašyta (1), seka ir tai, kad pridėti vektorių $\vec{B}$ yra tas pats, kaip atimti jam lygų ir priešingos krypties vektorių $\vec{A}$. Tuomet galima sakyti, kad atimti vektorių $\vec{B}$ yra tas pats, kaip pridėti vektorių (-$\vec{B}$). Todėl bet kokių vektorių $\vec{A}$ ir $\vec{B}$ skirtumą $\vec{K}=\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})$ galima pavaizduoti 13 arba 14 pav. 13 pav. vektorių atimti pavaizduota sudėties pagalba, kurią mes jau aptarėme, o pagal 14 pav. galima sakyti, kad, norint rasti 2 vektorių skirtumą, galima sutapatinti abiejų vektorių pradžias. Tuomet skirtumo didumas bus lygus atkarpai, jungiančiai vektorių galus, o kryptis yra į to vektoriaus pusę, iš kurio yra atimama.

Vektorius $\vec{A}$ ir $\vec{B}$ sudėję (6 pav.), gavome vektorių $\vec{K}$. O jeigu mums iš pradžių būtų duotas vektorius $\vec{K}$, tai galėtume pasielgti atvirkščiai: pakeisti jį dviem vektoriais $\vec{A}$ ir $\vec{B}$. Toks veiksmas vadinasi *vektoriaus skaidymu į dedamąsias arba komponentes.* Dedamųjų skaičius gali

būti bet koks, nes bet kurią vektoriaus $\vec{K}$ dedamąją $\vec{A}$ arba $\vec{B}$ savo ruožtu vėl galima skaidyti į dedamąsias ir t.t.

Remiantis 8 pav. galima nusakyti vektoriaus suskaidymo į dedamąsias būdą, kai duotos abiejų dedamųjų kryptys. Tuomet reikia iš skaidomo vektoriaus $\vec{K}$ galo ir pradžios išvesti tieses, lygiagretes dedamųjų kryptims. Tų tiesių susikirtimo taškai nusakys dedamųjų galus. Jų pradžios bus skaidomojo vektoriaus pradžioje. Pvz., turime kūną A, padėtą ant nuožulniosios plokštumos (15 pav.). Norime išskaidyti jo sunkio jėgą $m\vec{g}$ į dedamąsias išilgai nuožulniosios plokštumos MN ir statmenai į ją. Iš $m\vec{g}$ pradžios A ir galo vedame tieses lygiagrečiai ir statmenai MN. Jų susikirtimo taškai B ir C nusako ieškomas dedamąsias $\overrightarrow{AB}$ *ir* $\overrightarrow{AC}$.

Pateiktame pavyzdyje vektorius yra skaidomas į statmenas dedamąsias. Dažnai viena tokia dedamoji yra nukreipta x ašies, o kita y ašies kryptimi (16 pav.):

$$\vec{A}=\vec{A}_x+\vec{A}_y. \qquad (2)$$

Kai reikia nagrinėti judesius, kurie vyksta ne vienoje plokštumoje, naudojamos trys koordinačių ašys: x, y, z. Tuomet pagal 17 pav.:

$$\vec{A}=\vec{A}_x+\vec{A}_y+\vec{A}_z. \qquad (3)$$

xy plokštumoje guli dedamoji

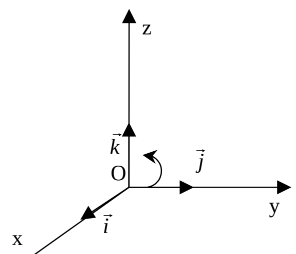
$$\vec{A}'=\vec{A}_x+\vec{A}_y.\ \ \vec{A}=\vec{A}'+\vec{A}_z.$$

Pratybos

1. Nustatykite, kokiu būdu išskaidyti duotąjį vektorių į dedamąsias, kai duota vienos dedamosios kryptis ir didumas, o apie antrąją nieko nepasakyta.
2. Kaip patogiausia išskaidyti jėgą, kuria neslidus paviršius veikia šliaužiantį juo kūną? Kaip tos dedamosios vadinasi ir kokį žinote ryšį tarp jų? (Ats.: Jėga skaidoma į statmenąją reakcijos jėgą $\vec{N}$ ir trinties jėgą $\vec{R}$. R = μN, kur μ - trinties koeficientas).

1.3 Vektorių daugyba iš skaliarų. Vienetiniai vektoriai. Projekcijos

Sudėję keletą lygių vektorių $\vec{A}$, pagal vektorių sumos apibrėžimą gausime naują vektorių, kurio kryptis bus ta pati, kaip ir vektoriaus $\vec{A}$, o didumas bus tiek kartų didesnis, kiek vektorių sudėsime. Jeigu sudėjome n lygių vektorių $\vec{A}$, tai atstojamąjį vektorių galime pažymėti n $\vec{A}$ - skaliaras n, padaugintas iš vektoriaus $\vec{A}$. Bendresniu atveju skaičius n gali būti trupmeninis ir neigiamas. Tuomet galima sakyti, kad, dauginant vektorių iš skaliaro, vektoriaus didumas pasikeičia tiek kartų, kam yra lygus to skaliaro didumas, o vektoriaus kryptis nesikeičia, jei skaliaras teigiamas ir pasidaro priešinga, kai skaliaras neigiamas. Skaliaras n gali reikšti laiką, masę (pvz., $m\vec{g}$),... arba tiesiog skaičių.



18 pav.

Vektoriaus dalybą iš skaliaro galima pakeisti daugyba iš atvirkštinio skaliaro:

$$\vec{K}=\frac{\vec{A}}{n}=\frac{1}{n}\cdot\vec{A}. \qquad (1)$$

Vektoriai, kurių didumas (modulis) lygus vienetui, vadinami **vienetiniais vektoriais.** Tuomet galima rašyti, kad bet koks vektorius

$$\vec{A}=A\cdot\vec{A}_1, \qquad (2)$$

kur $\vec{A}_1$ yra vektoriaus $\vec{A}$ vienetinis vektorius, o A – vektoriaus $\vec{A}$ didumas. Vienetinio vektoriaus $\vec{A}_1$ kryptis yra ta pati, kaip ir vektoriaus $\vec{A}$, o didumas, kaip jau sakėme: $|\vec{A}_1|=A_1=1$.

Iš (2) galime rašyti, kad vienetinis vektorius

$$\vec{A}_1 = \frac{\vec{A}}{A}. \tag{3}$$

Remiantis aukščiau išdėstytomis vektorių savybėmis, galima daryti išvadą, kad du vienetiniai vektoriai yra lygūs, jeigu jų kryptys yra vienodos.

Vienetinis vektorius, kuris yra nukreiptas x ašies kryptimi, žymimas ženklu $\vec{i}$, nukreiptas y ašies kryptimi – ženklu $\vec{j}$, nukreiptas z ašies kryptimi – ženklu $\vec{k}$ (18 pav.). Tuomet 1.2 paragrafo (2) ir (3) lygybėse

$$\left.\begin{aligned} \vec{A}_x &= A_x\vec{i}, \\ \vec{A}_y &= A_y\vec{j}, \\ \vec{A}_z &= A_z\vec{k} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

ir

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} \text{ (plokštumoje)} \tag{5}$$

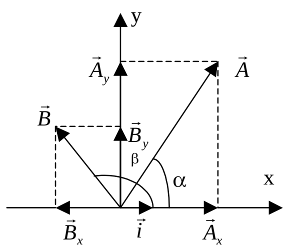
arba

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k} \text{ (erdvėje)} \tag{6}$$

A_x, A_y, A_z vadinamos **vektoriaus $\vec{A}$ projekcijomis** atitinkamai į ašis x, y, z.

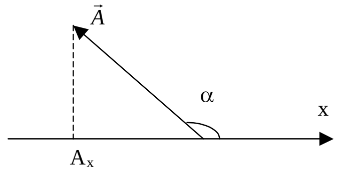
Žinodami vektoriaus projekcijas, pagal (6) žinome ir patį vektorių, nes koordinačių ašių vienetiniai vektoriai $\vec{i}$, $\vec{j}$ ir $\vec{k}$ duotoje koordinačių sistemoje yra žinomi. Todėl dažnai vektorius nusakomas per jo projekcijas, pvz., duotas vektorius $\vec{A}(A_x, A_y, A_z)$.

17 pav. brėžinyje dedamosios A_x, A_y, A_z buvo nukreiptos atitinkamų koordinačių ašių kryptimis. Kai turime vieną vektorių, koordinačių ašis visada galima taip parinkti, kad iš tikrųjų tos dedamosios turėtų tokias kryptis. Tačiau kai turime keletą vektorių, tai bendruoju atveju koordinačių sistemos negalima taip parinkti, kad visų vektorių tokios dedamosios būtų nukreiptos koordinačių ašių kryptimis. Pvz., 19 pav. vektoriaus $\vec{B}$ dedamoji $\vec{B}_x$ yra nukreipta priešinga x ašiai kryptimi – prieš vienetinį vektorių $\vec{i}$. Todėl, parašius lygybę $\vec{B}_x = B_x\vec{i}$, B_x bus neigiamas. Dėl to bendruoju atveju (6) dešinėje pusėje esančios sandaugos $A_x\vec{i}, A_y\vec{j}$ *ir* $A_z\vec{k}$ geriau vadinti skaliaro ir vektoriaus sandaugomis, kur skaliarai A_x, A_y, A_z gali *būti ne tik teigiami, bet ir neigiami.*



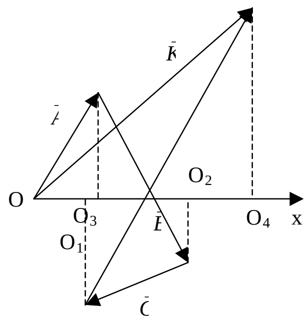
$\beta > 90^0$

19 pav.



20 pav.

Iš 19 pav. matyti, kad $A_x = A\cos\alpha$, $A_y = A\sin\alpha$. Projekcija A_x yra neigiama, kai $\alpha > 90^0$ (20pav.). Kai $\alpha = 0$, $A_x = A$, kai $\alpha = 90^0$, $A_x = 0$.



21 pav.

Kai turime daug vektorių, tai nesunku matyti (21 pav.), kad atstojamojo vektoriaus projekcija į kurią nors ašį yra lygi atskirų vektorių projekcijų sumai:

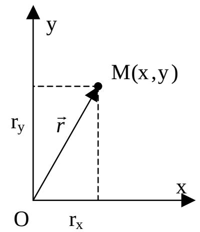
$$\begin{aligned} &\vec{K} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}, \\ &K_x = A_x + B_x + C_x + D_x, \end{aligned} \tag{7}$$

nes

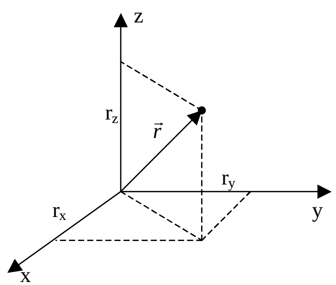
$$A_x = \overline{OO_1},\ B_x = \overline{O_1O_2},\ C_x = -\overline{O_2O_3},\ D_x = \overline{O_3O_4},$$

$$K_x = \overline{OO_4} = \overline{OO_1} + \overline{O_1O_2} - \overline{O_2O_3} + \overline{O_3O_4}.$$

Kai koks nors taškas M juda plokštumoje, tai jo padėtį vienareikšmiškai nusako vektorius, išvestas toje plokštumoje iš koordinačių pradžios O į judantį tašką M. Mat, vieną taško M padėtį atitinka tik vienas to vektoriaus didumas ir viena kryptis, kartu paėmus, t.y. tik viena vektoriaus vertė. Bet kokią kitą, kad ir labai artimą, taško M padėtį vaizduos jau kitoks vektorius – jei ne didumas, tai kryptis bus kitokia.



22 pav.



23 pav.

Tokį vektorių žymėsime $\vec{r}$ ir vadiname **radiusu** arba **spinduliu vektoriumi** (22 pav.).

$$\vec{r} = r_x\vec{i} + r_y\vec{j}, \tag{8}$$

kur r_x, r_y yra spindulio vektoriaus projekcijos į koordinačių ašis. Tačiau lengva manyti, kad r_x, r_y yra judančio taško M koordinatės x ir y:

$$r_x = x,\ r_y = y. \tag{9}$$

Kai taškas juda ne vienoje plokštumoje, o erdvėje, tai jo spindulys vektorius (23 pav.):

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \tag{10}$$

$(z = r_z)$

kur x, y,z – trys taško koordinatės.

Pratybos

1. Prisiminkime įvairius fizikinius dydžius, kurie yra skaliaro ir vektoriaus sandaugos.
2. Raskite vektoriaus $\vec{A}$ projekciją A_x, kai $\vec{A}$ su x ašimi sudaro kampą $\alpha = 180^0$.

3. Remdamiesi Pitagoro teorema, parašykite vektoriaus $\vec{A}$ didumą A, išreikštą per projekcijas A_x, A_y, A_z.
4. Parašykite spindulio vektoriaus didumą r, išreikštą per koordinates plokštumoje ir erdvėje.

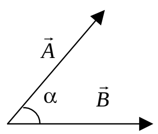
1.4 Skaliarinė sandauga

Dviejų vektorių skaliarine sandauga vadinama jų didumų sandauga, padauginta iš kosinuso kampo tarp vektorių. Vektorių $\vec{A}$ ir $\vec{B}$ (24 pav.) skaliarinė sandauga $(\vec{A}\,\vec{B})$=ABcos($\vec{A}\,\vec{B}$)=ABcosα (1). $(\vec{A}\,\vec{B})=(\vec{B}\,\vec{A})$. Tai **skaliaras.**

Vieno vektoriaus didumas, padaugintas iš cosα, yra to paties vektoriaus projekcija į kito vektoriaus kryptį: A cosα=A_B, B cosα=B_A. Todėl $(\vec{A}\,\vec{B})$ = AB_A = BA_B. Pvz., pastovios jėgos $\vec{F}$ tiesiame kelyje $\vec{S}$ (25 pav.) atliktas **darbas**

$$A = FS\cos\alpha = (\vec{F}\vec{S}) = SF_S, \qquad (2)$$

kur F_S yra jėgos projekcija į kelio kryptį. Kai $\alpha>90^0$, cosα (arba F_S) yra neigiamas, ir darbas A taip pat neigiamas



24 pav.

Kai $\vec{A}=\vec{B}$, iš (1) seka, kad

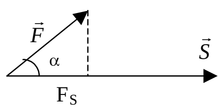
$$(\vec{A}\vec{B}) = AA\cos 0^0 = A^2 = \vec{A}^2.$$

Toks dydis vadinamas **vektoriaus kvadratu.** Nesunku matyti, kad vienetinių vektorių skaliarinės sandaugos

$$\left.\begin{aligned}&(\vec{i}\,\vec{i}) = \vec{i}^{\,2} = 1, (\vec{k}\vec{k}) = \vec{k}^{\,2} = 1,\\&(\vec{j}\vec{j}) = \vec{j}^{\,2} = 1,\\&(\vec{i}\vec{j}) = (\vec{j}\vec{k}) = (\vec{k}\vec{i}) = 0.\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Jeigu vektorius $\vec{A}$ ir $\vec{B}$ (žr. 1.3 paragrafo (6) lygtį) išreikšime per projekcijas į koordinačių ašis, tai gausime:

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k},$$
$$\vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}.$$



25 pav.

Tuomet

$$\begin{aligned}(\vec{A}\vec{B}) &= ((A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k})(B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k})) =\\&= A_xB_x\vec{i}^{\,2} + A_yB_y\vec{j}^{\,2} + A_zB_z\vec{k}^{\,2} + A_xB_y(\vec{i}\vec{j}) +\\&+ A_xB_z(\vec{i}\vec{k}) + A_yB_x(\vec{j}\vec{i}) + A_yB_z(\vec{j}\vec{k}) + A_zB_x(\vec{k}\vec{i}) +\\&+ A_zB_y(\vec{k}\vec{j}).\end{aligned}$$

Toliau remdamiesi (3) gauname, kad

$$(\vec{A}\vec{B}) = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z, \qquad (4)$$

t.y. skaliarinė sandauga lygi atitinkamų projekcijų sandaugų sumai.

Vektoriaus kvadratas

$$\vec{A}^2 = (\vec{A}\vec{A}) = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2. \qquad (5)$$

Pratybos

1. Kam lygi skaliarinė sandauga $(\vec{A}\,\vec{B})$, kai $\vec{B} = -\vec{A}$?
2. Nustatykite, kada skaliarinė sandauga $(\vec{A}\,\vec{B})$, esant duotiems $|\vec{A}|$ ir $|\vec{B}|$, yra didžiausia, kada mažiausia ir kada lygi nuliui.

1.5 Vektorinė sandauga

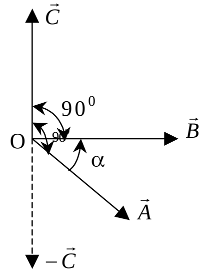
Dviejų vektorių $\vec{A}$ ir $\vec{B}$ vektorinė sandauga dažnai žymima $[\vec{A}\,\vec{B}]$. Tai yra **vektorius.** Jį trumpiau pažymėjus $\vec{C}$, galime rašyti:

$$\vec{C} = [\vec{A}\vec{B}]. \qquad (1)$$

Vektorius $\vec{C}$ **apibrėžiamas** taip: jis yra statmenas į abu vektorius $\vec{A}$ ir $\vec{B}$ (26 pav.) ir nukreiptas į tą pusę, iš kurios žiūrint, **pirmasis** vektorius $\vec{A}$, sukamas mažiausiu kampu prieš laikrodžio rodyklę, sutampa su antruoju vektoriumi $\vec{B}$.

Vektorinės sandaugos didumas

C=ABsinα. (2)



26 pav.

Iš pateikto apibrėžimo seka, kad

$$[\vec{A}\vec{B}] = -[\vec{B}\vec{A}], \qquad (3)$$

nes, norint, kad vektorius $\vec{B}$, sukamas mažiausiu kampu prieš laikrodžio rodyklę, sutaptų su vektoriumi $\vec{A}$, reikia žiūrėti į juos iš vektoriaus (-$\vec{C}$) galo.

Vektorinė sandauga bet kokio vektoriaus $\vec{A}$ iš jo paties $[\vec{A}\,\vec{A}]$=0, nes tuomet C=Aasin0^0=0.

Remiantis vektorinės sandaugos apibrėžimu, nesunku įsitikinti (18 pav.), kad vienetinių vektorių vektorinės sandaugos

$$[\vec{i}\,\vec{i}] = [\vec{j}\vec{j}] = [\vec{k}\vec{k}] = 0, \qquad (4)$$

$$\left.\begin{aligned}&[\vec{j}\vec{k}] = \vec{i} = -[\vec{k}\vec{j}],\\&[\vec{k}\vec{i}] = \vec{j} = -[\vec{i}\vec{k}],\\&[\vec{i}\vec{j}] = \vec{k} = -[\vec{j}\vec{i}].\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Vektorius $\vec{A}$ ir $\vec{B}$ išreiškus per projekcijas, vektorinė sandauga

$$\begin{aligned}[\vec{A}\vec{B}] &= [(A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k})(B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k})] = A_xB_x[\vec{i}\,\vec{i}] + A_yB_y[\vec{j}\vec{j}] +\\&+ A_zB_z[\vec{k}\vec{k}] + A_xB_y[\vec{i}\vec{j}] + A_xB_z[\vec{i}\vec{k}] + A_yB_x[\vec{j}\vec{i}] + A_yB_z[\vec{j}\vec{k}] + A_zB_x[\vec{k}\vec{i}] +\\&+ A_zB_y[\vec{k}\vec{j}].\end{aligned}$$

Atsižvelgę į (4) ir (5), gauname, kad

$$[\vec{A}\vec{B}] = (A_yB_z - A_zB_y)\vec{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\vec{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\vec{k}. \qquad (6)$$

Žiūrėdami į (6), galime parašyti vektorinės sandaugos $[\vec{A}\,\vec{B}]$ projekcijas į koordinačių ašis:

$$\left.\begin{aligned}&[\vec{A}\vec{B}]_x = A_yB_z - A_zB_y,\\&[\vec{A}\vec{B}]_y = A_zB_x - A_xB_z,\\&[\vec{A}\vec{B}]_z = A_xB_y - A_yB_x.\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Mechanikos kurse ir kituose fizikos skyriuose vektorinė sandauga yra dažnai sutinkama. Pvz., momento vektorius. Tegul vektoriaus $\vec{A}$ pradžia yra taške P, kurio padėtį nusako spindulys vektorius $\vec{r}$ (27 pav.). Vektoriaus $\vec{A}$ momentu taško O atžvilgiu vadinasi vektorinė sandauga $[\vec{r}\vec{A}]$. Kai vektorius $\vec{A}$ yra tašką P veikianti jėga $\vec{F}$, gauname jėgos momentą. **Jėgos momentas** $\vec{M}$ yra vektorinė sandauga spindulio vektoriaus to taško, kurį veikia jėga, ir jėgos(28 pav.):

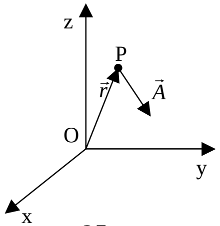
$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}]. \qquad (8)$$

Tarėme, kad $\vec{r}$ ir $\vec{F}$ guli yz plokštumoje. Tuomet jėgos momentas $\vec{M}$ nukreiptas x ašies kryptimi. Kaip matome, jėgos momentas nukreiptas į tą pusę, iš kurios žiūrint, jėga tašką (kūną) suka prieš laikrodžio rodyklę.

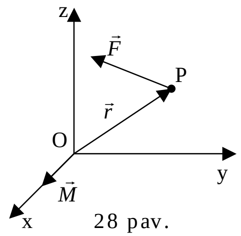
Jėgos momento didumas

$$M = rF\sin\alpha. \tag{9}$$

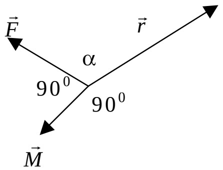
Iš 29 pav. matyti, kad r sinα=r·sin(180^0 - β)=r sinβ=$\overline{OO_1}$.



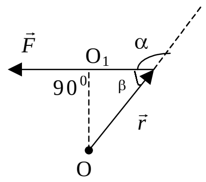
27 pav.



28 pav.



28 pav.



29 pav.

Taigi,

$$M = F\cdot\overline{OO_1}. \tag{10}$$

Bet tai juk yra jėgos didumo ir peties sandauga. Nenaudojant vektorių, taip dažniausia ir apibrėžiama jėgos momento sąvoka.

Jėgos momentas $\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}]$, kai žinoma veikianti jėga $\vec{F}$, priklauso nuo spindulio vektoriaus $\vec{r}$ arba nuo taško O, kurio atžvilgiu skaičiuojame jėgos momentą, pasirinkimo (28 pav.). Todėl dažnai jėgos momentą žymi, nurodant pasirinktąjį tašką O. Rašom $\vec{M}_O$. Pasirinkus kitą tašką O_1, tos pačios jėgos $\vec{F}$ momentas bus $\vec{M}_{O1}$; $\vec{M}_{O1} \neq \vec{M}_O$. Jėgos momento vektorius $\vec{M}_O$ dar vadinamas momento centru (taško O) atžvilgiu. Momento projekcijos į koordinačių ašis M_{Ox}, M_{Oy}, M_{Oz} vadinamos momentu atitinkamos ašies atžvilgiu. Pagal (7) ir (8) bei 1.3 paragrafo (9) ir (10):

$$\left.\begin{aligned} M_x &= M_{Ox} = yF_z - zF_y,\\ M_y &= M_{Oy} = zF_x - xF_z,\\ M_z &= M_{Oz} = xF_y - yF_x.\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Arba galima pagal (8) nustatyti jėgos momento $\vec{M}$ kryptį, kampus α, β ir γ, kuriuos vektorius $\vec{M}$ sudaro su atitinkamomis koordinačių ašimis, ir modulį M. Tuomet

$$\left.\begin{aligned} M_x &= M\cos\alpha,\\ M_y &= M\cos\beta,\\ M_z &= M\cos\gamma.\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Pratybos

1. Remdamiesi (2), nustatykite, ką reiškia C, nubraižius lygiagretainį, kurio kraštinės yra $\vec{A}$ *ir* $\vec{B}$.
2. Nustatykite, kada vektorinės sandaugos didumas C, esant duotiems didumams A ir B, yra didžiausias, kada lygus nuliui.
3. Kaip apibrėžtumėte greičio momentą, judesio kiekio momentą?

II. KINEMATINĖS JUDĖJIMO LYGTYS

2.1 Pagrindinis kinematikos uždavinys

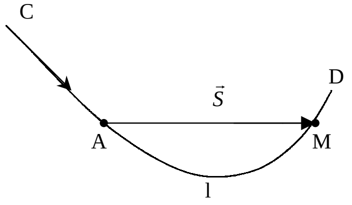
Mechanika – tiksliau dinamika – yra mokslas apie tai, kaip nustatyti kūno padėtį bet kuriuo laiko momentu. Tai galima padaryti tik žinant kūną veikiančias jėgas. Tačiau, kaip minėjome, kinematika yra mechanikos dalis, nagrinėjanti kūnų judėjimą, neatsižvelgiant į juos veikiančias jėgas. Todėl kinematikos uždavinys yra daugiau geometrinis, matematinis. Toks judėjimo tyrimas atsirado vystantis technikai, nagrinėjant įvairių mechanizmų judėjimą. Išskirti kinematiką, kaip atskirą mechanikos dalį, pasiūlė lenkų mokslininkas Vronskis 1818 m., o pirmą sistemingą kinematikos kursą parašė prancūzų profesorius H. Resalis 1862 m.

Pagrindinis kinematikos uždavinys yra, žinant kūno koordinates, nustatyti jo trajektoriją, greitį, pagreitį ir dar kai kuriuos vadinamuosius kinematinius dydžius. Tai daroma, naudojantis keletu metodų. Juos galima suskirstyti į natūrinį, vektorinį, koordinačių ir grafinį metodus.

Toliau kalbėsime apie materialaus taško ir kieto kūno judėjimo nagrinėjimo metodus.

2.2 Natūrinis metodas. Tangentinis ir normalinis pagreičiai

Šiuo metodu patogu naudotis, kai yra žinoma judančio materialaus taško trajektorija.



30 pav.

Tegul materialus taškas M juda žinoma trajektorija CD (30 pav.). Pasirinkime vieną trajektorijos tašką A. Judančio materialaus taško M padėtį bet kuriuo laiko momentu žinosime, jeigu žinosime, kurioje pusėje jis yra nuo taško A ir kiek nuo taško A nutolęs. Tegul materialus taškas M juda trajektorija kryptimi nuo C į D. Pažymėkime jo atstumą nuo taško A išilgai trajektorijos raide l. Dydis l, laikui bėgant, keisis. Jei materialus taškas M dar nebus praėjęs taško A, tegul l bus neigiamas, o kai taškas M jau bus praėjęs tašką A, tegul l bus teigiamas. Tuomet, laikui bėgant, l visą laiką didės.

Tegul mums žinomas atstumas l bet kuriuo laiko momentu. Jį galime užrašyti tokiu būdu:

$$l=f(t). \tag{1}$$

Tą dydį galima vadinti materialiojo taško **judėjimo lygtimi,** arba dėsniu. Iš jos pagal l didumą ir ženklą tikrai galima rasti judančio materialaus taško M padėtį bet kuriuo laiko momentu.

Kaip žinome, atstumo l didumas nesutampa su materialaus taško poslinkio didumu S. Tik imant pakankamai mažą atstumą Δl, jis apytikriai bus lygus ΔS.

Be to, žinome (tai matysime ir vėliau), kad judančio taško M greitis $\vec{v}$ yra nukreiptas lietėjos į trajektoriją Toje vietoje kryptimi (31 pav.). Pažymėkime lietėjos vienetinį vektorių $\vec{\tau}$ ir nukreipkime jį taško M judėjimo (greičio $\vec{v}$) kryptimi. Tuomet galima rašyti, kad

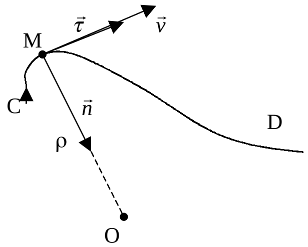
$$\vec{v} = v\vec{\tau}, \tag{2}$$

kur greičio didumas

$$v \approx \frac{\Delta l}{\Delta t}. \tag{3}$$

Čia Δt yra mažas klaiko tarpas, per kurį materialus taškas nuėjo mažą atstumą Δl. Norint gauti tikslią greičio vertę, reikia imti santykio $\frac{\Delta l}{\Delta t}$ ribą, kai laiko tarpas Δt artėja į nulį. Ši riba žymima taip:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{dl}{dt}, \tag{4}$$



31 pav.

kur dl yra nykstamai mažas atstumas, nueitas per nykstamai mažą laiko tarpą dt. Santykis dl/dt paprastai vadinamas funkcijos l išvestine (pagal laiką t). Po šių papildomų matematinių pastabų galime rašyti, kad

$$v = \frac{dl}{dt} = \frac{ds}{dt} \tag{5}$$

ir

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{\tau}. \tag{6}$$

Materialaus taško pagreitis

$$\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t}, \tag{7}$$

kur $\vec{v}_0$ yra pradinis greitis (kai t=t_0=0), o $\vec{v}$ - greitis laiko momentu t. Pagal (7) galima tiksliai rasti pagreitį tada, kai jis pastovus. Kai pagreitis $\vec{a}$ laikui bėgant, kinta (gali kisti pagreičio didumas, kryptis arba ir didumas, ir kryptis), vietoj laiko t reikia imti nykstamai mažą laiko tarpą dt, o vietoj $\vec{v} - \vec{v}_0$ tuomet bus nykstamai mažas greičio pokytis $d\vec{v}$. Taigi, pagreitis:

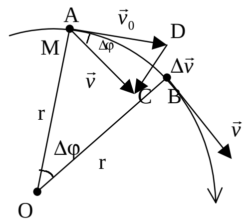
$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \tag{8}$$

Kai materialus taškas juda pastovaus didumo greičiu apskritimu, greičio pokytis $\Delta\vec{v}$ (dar tiksliau $d\vec{v}$), o tuo pačiu ir pagreitis $\vec{a}$ yra nukreiptas į apskritimo centrą, ir pagreitis absoliutiniu didumu lygus

$$a = \frac{v^2}{r}, \tag{9}$$

kur r – apskritimo spindulys. Tokį pagreitį vadiname įcentriniu pagreičiu.

Įrodykime (9) lygybę. Tegul taškas M juda pastovaus didumo v greičiu spindulio r apskritimu 31 a pav. parodyta kryptimi. Čia $\vec{v}_0$ - pradinis greičio vektorius, $\vec{v}$ - greičio vektorius praėjus mažam laikotarpiui Δt: $\vec{v} \neq \vec{v}_0$, nors jų didumai vienodi: v=v_0. Mažas greičio pokytis $\Delta\vec{v} = \vec{v} - \vec{v}_0$ apytiksliai yra statmenas greičio vektoriui $\vec{v}_0$, nes lygiašonio trikampio ACD viršūnės kampas Δφ, lygus spindulio r pasisukimo kampui per mažą laiko tarpą Δt, yra mažas. Todėl $\Delta\vec{v}$ yra lygiagretus spinduliui $\vec{r}$, ir pagreitis $\vec{a}$ pagal (8) tikrai nukreiptas į apskritimo centrą O.



31a pav.

Pagreičio didumas $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$, o $\Delta v = v\Delta\varphi$, nes per taškus C ir D galima nubrėžti spindulio v apskritimą, kurio centras yra taške A. Savo ruožtu $\Delta\varphi = \frac{\Delta l}{r}$, kur Δl yra lankas AB, kurį kūnas M nueina per laikotarpį Δt. Taigi Δl=vΔt. Todėl

$$a = \frac{v\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{v\Delta l}{r \cdot \Delta t} = \frac{vv\Delta t}{r\Delta t} = \frac{v^2}{r},$$

ir (9) lygybė įrodyta.

Kai materialus taškas juda bet kokia kreive, žinome, kad galima tarti, kad jis juda įvairių apskritimų lankais.Tuomet vietoj vieno apskritimo spindulio rpatogu įvesti dydį $\rho = \overline{MO}$ (31 pav.), kuris jau bus kintamas dydis, nes laikui bėgant, materialus taškas M judės vis kitokių apskritimų (su kitokiais spinduliais ir kitais centrais) lankais. Dydį ρ galima vadinti trajektorijos kreivumo spinduliu taške M, o tašką O – trajektorijos kreivumo centru tame pat taške. Vienetinį vektorių, nukreiptą išilgai ρ kreivumo centro kryptimi, pažymėkime $\vec{n}$. Jis vadinamas normalės vienetiniu vektoriumi. Iš apibrėžimų matyti, kad $\vec{n}$ yra statmenas į lietėjos vienetinį vektorių $\vec{\tau}$.

Kai materialus taškas juda bet kokia kreive, tačiau jo greičio didumas nekinta, $d\vec{v}$ bus nukreiptas į kreivumo centrą O ($\vec{n}$ kryptimi). Todėl taško pagreitį gausime, (9) vietoj r įrašę ρ. Pažymėkime tą pagreitį a_n. Tuomet

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

Tačiau kadangi pagreitis yra vektorius, geriau naudoti dydį

$$\vec{a}_n = a_n \cdot \vec{n} = \frac{v^2}{\rho} \cdot \vec{n}. \tag{10}$$

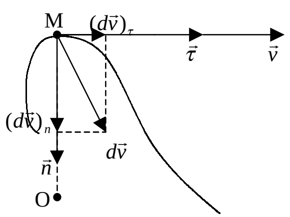
Tai **normalinis taško pagreitis.** a_n yra jo didumas. Normalinis pagreitis visada yra nukreiptas į trajektorijos kreivumo centrą.

Kai materialus taškas juda bet kokia kreive ir jo greičio didumas nėra pastovus, tai nykstamai mažas greičio pokytis $d\vec{v}$ jau nebus lygiagretus normalės vienetiniam vektoriui $\vec{n}$. Tačiau tokį $d\vec{v}$ galima išskaidyti į dedamąsias $\vec{n}$ ir $\vec{\tau}$ kryptimis (32 pav.). Tuomet $d\vec{v} = (d\vec{v})_n + (d\vec{v})_\tau$, ir pagreitis

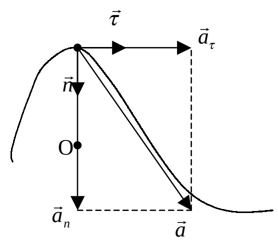
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{(d\vec{v})_n}{dt} + \frac{(d\vec{v})_\tau}{dt}. \tag{11}$$

Nesunku matyti, kad pirmasis narys dešinėje pusėje yra normalinis taško pagreitis:

$$\frac{(d\vec{v})_n}{dt} = \vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho}\vec{n}. \tag{12}$$



32 pav.



33 pav.

Kadangi dedamoji $(d\vec{v})_\tau$ atsirado tada, kai pradėjo keistis greičio didumas v, tai $(d\vec{v})_\tau = dv \cdot \vec{\tau}$, kur dv yra nykstamai mažas greičio didumo pokytis. Todėl antrasis narys (11) dešinėje pusėje

$$\frac{(d\vec{v})_\tau}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} = \vec{a}_\tau. \tag{13}$$

Jis vadinamas **tangentiniu taško pagreičiu.**

(12) ir (13) įrašę į (11), gauname bendrą materialaus taško pagreičio formulę:

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau = \frac{v^2}{\rho}\vec{n} + \frac{dv}{dt}\vec{\tau}. \tag{14}$$

Kai greičio didumas v, laikui bėgant, didėja, dv yra teigiamas, ir $\vec{a}_\tau$ yra nukreiptas $\vec{\tau}$ kryptimi. Kai materialus taškas juda lėtėdamas, dv yra neigiamas, ir $\vec{a}_\tau$ yra nukreiptas priešinga $\vec{\tau}$ kryptimi. Dėl to dv/dt yra tangentinio pagreičio projekcija į $\vec{\tau}$ kryptį, galinti, kaip žinome, būti ir teigiama, ir neigiama. Tuo pat metu dv/dt yra ir viso pagreičio $\vec{a}$ projekcija į $\vec{\tau}$, nes normalinio pagreičio projekcija į $\vec{\tau}$ lygi nuliui.

Mes iki šiol turėjome galvoje atvejus, kai materialus taškas M juda trajektorija visą laiką į vieną pusę. Jeigu jis juda ne į vieną pusę, pvz., svyruoja, tai atstumo pokytis Δl gali būti ne tik teigiamas, bet ir neigiamas, ir (3) apibrėžtas dydis v taip pat gali turėti abu ženklus. Todėl v tada jau nebus greičio didumas, o bus greičio $\vec{v}$ projekcija į $\vec{\tau}$. Ką mes esame pasakę apie dv/dt, galioja ir šiuo atveju. Tiktai dv/ dt bus jau ne greičio $\vec{v}$ didumo, o jo projekcijos išvestinė pagal laiką. Nesunku matyti, kad atstumas l ne visada sutampa su nueitu keliu. Pvz., tegul materialus taškas M svyruoja. Tegul per laiką t jis nutolo ir grįžo atgal iki taško A. Tuomet atstumas bus lygus nuliui, o nueitas kelias bus 2l. Nueitas kelias visada yra teigiamas dydis, o atstumas l, kaip matėme, gali būti ir teigiamas ir neigiamas.

(14) formulė yra teisinga ir tada, kai materialus taškas juda ne vienoje plokštumoje, o erdvėje, pvz., spirale.

Kadangi $\vec{a}_n$ ir $\vec{a}_\tau$ sudaro statų kampą (33 pav.), tai pagal Pitagoro teoremą pagreičio $\vec{a}$ didumas

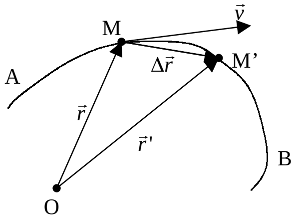
$$a = \sqrt{\vec{a}_n^2 + \vec{a}_\tau^2}. \tag{15}$$

Pratybos

1. Nustatykite, kada materialaus taško normalinis pagreitis yra lygus nuliui. Kam lygus normalinis pagreitis, judant tiese?
2. Matematinė svyruoklė atlenkta nuo pusiausvyros padėties kampu α ir paleista svyruoti. Kam lygus jos normalinis pagreitis: a) didžiausio atsilenkimo taškuose ir b) pereinant per pusiausvyros tašką? Kam lygus tangentinis pagreitis, pereinant per pusiausvyros padėtį?
3. Raskite normalinį pagreitį kūno, gulinčio pusiaujyje ant Žemės paviršiaus, turėdami omeny Žemės sukimąsi aplink savo ašį. (Ats.: 2,5 cm/s^2)
4. Žemės juda aplink Saulę elipse. Saulė yra viename elipsės židinyje. Ką galima pasakyti apie Žemės tangentinį pagreitį perihelyje ir apohelyje ir apie normalinį pagreitį visuose Žemės taškuose?
5. Pastumtos rogutės vos vos peršliaužė per kalniuko viršų ir po to nušliaužė tolyn. Kam buvo lygus rogučių pagreitis kalniuko viršuje?
6. Kūno, judančio spindulio R=10m apskritimu ir tolygiai greitėjančio, po t=2s greičio didumas v buvo lygus 5m/s. Raskite kūno pagreitį tuo momentu. Kokį kampą jis sudaro su apskritimo spinduliu? Pradinis kūno greitis $\vec{v}_0 = 0$. (Ats.: a=2,5 $\sqrt{2}$ m/s^2, α=45^0).
7. Kūnas išmestas pradiniu greičiu $\vec{v}_0$ kampu α į horizontą. Raskite trajektorijos kreivumo spindulį aukščiausiame taške ir prie pat Žemės paviršiaus. Palyginkite juos. Oro pasipriešinimo nepaisykite. (Ats.: $\dfrac{v_0^2 \cos^2\alpha}{g}$ ir $\dfrac{v_0^2}{g\cos\alpha}$).
8. Kūnas išmestas pradiniu greičiu v_0=21m/s kampu α=60^0 į horizontą. Kokiame aukštyje jo greitis sudarys kampą β=30^0 į horizontą? Oro pasipriešinimo nepaisykite (Ats.: $h = \dfrac{v_0^2}{2g} \cdot \dfrac{\cos^2\beta - \cos^2\alpha}{\cos^2\beta} \approx 15m$).

2.3 Vektorinis metodas

I skyriaus 3 skirsnyje jau kalbėjome apie tai, kad erdvėje judančio taško M padėtį vienareikšmiškai nusako to taško spindulys vektorius $\vec{r}$.



34 pav.

Jeigu žinosime materialaus taško M radiusą vektorių bet kuriuo laiko momentu, tai žinosime ir to taško judėjimą. Tą teiginį galima užrašyti taip:

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \qquad (1)$$

Tokią lygtį galima vadinti materialaus taško **judėjimo vektorine kinematine lygtimi.** Materialaus taško trajektorija bus kreivė, kurią, laikui bėgant, nubrėš radiuso – vektoriaus galas M (34 pav.). Jeigu materialaus taško M trajektorija AB bus tiesi, tai taško judėjimas bus tiesiaeigis. Visais kitais atvejais materialaus taško judėjimas bus kreivaeigis. Pvz., vertikaliai aukštyn išmesto kūno judėjimas yra tiesiaeigis, o to paties kūno, išmesto ne vertikaliai tokio pat didumo greičiu toje pat vietoje, judėjimas bus jau kreivaeigis – parabolė. Planetos aplink Saulę, o taip pat natūralūs ir dirbtiniai planetų palydovai aplink planetas daugiausia juda elipsėmis ir kai kada apskritimais. Kometos Saulės atžvilgiu juda elipsėmis, parabolėmis arba hiperbolėmis. Mašinų ir mechanizmų dalys dažnai juda apskritimais arba, tiesiaeigiai judėdamos, svyruoja. α dalelė, būdama netoli pavienio atomo branduolio, juda hiperbole. Laisvas elektronas vienalyčiame elektriniame lauke juda tiese arba parabole, o magnetiniame lauke – tiese, apskritimu arba spirale. Molekulės, atomai, elektronai medžiagoje juda labai sudėtingai, vaizdžiai net nenusakomu būdu. Apskritai, dauguma gamtoje vykstančių mechaninių judesių yra kreivaeigiai. Tik kada – ne – kada trajektorijos arba jų dalys būna tiesios. Juk į mokyklą praktiškai nė vienas negalime eiti, judėdami tiesiaeigiai.

Kaip vėliau pamatysime, judančio kūno trajektorija visų pirma priklauso nuo kūną veikiančių jėgų savybių. Tačiau, kaip ką tik matėme, kalbėdami apie išmestą kūną, trajektorija priklauso ir nuo pradinio greičio. Judančio taško padėtis erdvėje bet kuriuo laiko momentu priklauso dar ir nuo pradinės kūno padėties. Iš vienos vietos išmestas kūnas judės viena parabole, o visiškai vienodai iš kitos vietos išmestas kūnas judės kita parabole. Tas pastabas vėliau turėsime omeny.

Tegul laiko momentu t judančio materialaus taško M radiusas vektorius $\vec{r}$, o laiko momentu t' radiusas vektorius tegul yra $\vec{r}'$. Tegul $t'-t = \Delta t$ ir $\vec{r}'-\vec{r} = \Delta\vec{r}$ (34 pav.). $\Delta\vec{r}$ yra judančio materialaus taško M poslinkis per laiko tarpį Δt. Santykis $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ bus vektorius, nukreiptas poslinkio $\Delta\vec{r}$ kryptimi. Tas santykis dar vadinamas vidutiniu greičiu. Tikrasis, arba momentinis, greitis laiko momentu t bus

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}. \qquad (2)$$

Taigi, materialaus taško greitis yra radiuso vektoriaus išvestinė pagal laiką.

Materialaus taško pagreitį mes jau esame apibrėžę praeito skirsnio (8) lygtimi. Prisimindami galime dar kartą parašyti:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \qquad (3)$$

Pagreitis yra greičio išvestinė pagal laiką.

Pratybos

1. Kosmonautas, skrisdamas apskritimine orbita aplink Mėnulį, pro kosminio laivo langą išmetė akmenuką statmenai į laivo orbitos plokštumą. Kaip tas akmenukas judės?

2.4 Koordinačių metodas

Šis metodas yra glaudžiai susijęs su vektoriniu metodu. Mat, kiekvieną vektorių galima išreikšti per jo projekcijas į koordinačių ašis. Apie tai kalbėjome I skyriuje. Dar kartą parašysime radiuso vektoriaus išraišką per jo projekcijas:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \qquad (1)$$

Prisiminkime, kad projekcijos x, y, z čia yra judančio taško koordinatės, o koordinačių sistemą sudaro trys tarpusavyje statmenos ašys x, y, z. Tokia sistema paprastai vadinama **Dekarto koordinačių sistema.** Yra ir kitokių koordinačių sistemų. Tačiau mes jų nenagrinėsime ir toliau visą laiką turėsime galvoje tik Dekarto koordinates.

I skyriuje aiškinome, kad, žinodami vektoriaus projekcijas, žinome ir patį vektorių. Todėl vietoj praeito skirsnio (1) lygties $\vec{r} = \vec{r}(t)$. galime rašyti

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(t),\\ y &= f_2(t),\\ z &= f_3(t). \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Jei visas tas tris laiko funkcijas žinosime, tai žinosime judančio materialaus taško padėtį bet kuriuo laiko momentu. Todėl (2) lygčių sistemą galima vadinti materialaus taško **judėjimo koordinatinėmis kinematinėmis lygtimis.** Kai taškas juda vienoje plokštumoje, tai (2) pakanka 2 – jų lygčių. Pvz., $y=f_2(t)$ ir $z=f_3(t)$ – kai taškas juda yz plokštumoje. Kai taškas juda tiese, tai (2) pakanka 1 lygties. Pvz., $y=f_2(t)$, kai taškas juda y ašyje.

Kai materialus taškas M juda plokštumoje yz, tai, jo poslinkį $\Delta\vec{r}$ per mažą laiko tarpą Δt išskleidę į dedamąsias pagal x ir y ašis (35 pav.), gauname:

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j}. \qquad (3)$$

Nesunku apibendrinti, kad taškui, judančiam erdvėje,

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}. \qquad (4)$$

Δx, Δy ir Δz yra judančio materialaus taško koordinačių pokyčiai per laiko tarpį Δt arba, kitaip sakant, - vektoriaus $\Delta\vec{r}$ projekcijos į koordinačių ašis. Kaip žinome, tos projekcijos priklausomai nuo vektoriaus $\Delta\vec{r}$ krypties gali būti teigiamos arba neigiamos. Kurios nors koordinatės pokytis, pvz., Δy, yra teigiamas, kai, laikui bėgant, ta koordinatė didėja, ir yra neigiamas, kai koordinatė mažėja.

Remdamiesi 2.3 paragrafu, vidutinį judančio materialaus taško greitį galime taip užrašyti:

$$\vec{v}_{vid} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\vec{k}, \qquad (5)$$

o tikrasis greitis

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}\vec{k}. \qquad (6)$$

Greitį $\vec{v}$, kaip ir bet kokį vektorių, pagal 1.3 paragrafo (6) per jo projekcijas galima išreikšti taip:

$$v = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}. \qquad (7)$$

(6) palyginę su (7) matome, kad greičio projekcijos:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt},\\ v_y &= \frac{dy}{dt},\\ v_z &= \frac{dz}{dt}. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Greičio projekcijos yra lygios judančio materialaus taško atitinkamų koordinačių išvestinėms laiko atžvilgiu.

Pagal 1.4 paragrafo (5) greičio kvadratas

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2,$$

todėl greičio didumas

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 + (\frac{dz}{dt})^2}. \qquad (9)$$

Čia turima galvoje aritmetinė kvadratinės šaknies reikšmė.

Remiantis 1.3 ir 2.2 paragrafais, matyti, kad greičio pokytis per mažą laiko tarpą Δt

$$\Delta\vec{v} = \Delta v_x \vec{i} + \Delta v_y \vec{j} + \Delta v_z \vec{k},$$

o pagreitis

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\vec{i} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\vec{j} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_z}{\Delta t}\vec{k}, \\ \vec{a} &= \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k}. \end{aligned} \qquad (10)$$

Turint omeny, kad

$$a = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, \qquad (11)$$

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt}, \\ a_y &= \frac{dv_y}{dt}, \\ a_z &= \frac{dv_z}{dt}. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Pagreičio projekcijos yra lygios atitinkamų greičio projekcijų išvestinėms pagal laiką.

Analogiškai su (9) pagreičio didumas

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{(\frac{dv_x}{dt})^2 + (\frac{dv_y}{dt})^2 + (\frac{dv_z}{dt})^2}. \qquad (13)$$

Gvildendami (7) greičio $\vec{v}$ išraišką per jo projekcijas, galime teigti, kad materialaus taško judėjimą bet kokiu greičiu $\vec{v}$ visada galima pakeisti to taško judėjimu x – o ašyje greičiu $v_x\vec{i}$, y – o ašyje greičiu $v_y\vec{j}$ ir z – o ašyje greičiu $v_z\vec{k}$. Galima teigti, kad materialus taškas tuo pačiu metu atlieka kelis judesius ir jo greitis yra lygus tų judesių greičių sumai.

Visai analogiškai galima aiškinti ir pagreičio išraišką per jo projekcijas (11). Judėjimą kokiu nors pagreičiu $\vec{a}$ galima pakeisti judėjimu x – o ašyje pagreičiu $a_x\vec{i}$, y – o ašyje pagreičiu $a_y\vec{j}$ ir z – o ašyje pagreičiu $a_z\vec{k}$.

Priklausomai nuo judėjimo pobūdžio greitį ir pagreitį galima skaidyti ne tik į 3, bet dažnai į 2, o norint ir į 4 ar daugiau dedamųjų. Juk duotojo vektoriaus dedamųjų skaičius gali būti bet koks.

Vadinasi, bet kurį materialaus taško judėjimą galima vaizduoti keleto kitų judesių atstojamuoju judėjimu. Toks principas mechanikoje yra naudingas.

Pasinaudosime juo, kai kūnas juda pastoviu pagreičiu $\vec{a}$=const., t.y. kai, laikui bėgant, nekinta nei pagreičio didumas, nei jo kryptis. Tuomet pagreičio projekcijos bus taip pat pastovios: $a_x = const., a_y = const., a_z = const.$ Tokį judėjimą galima vadinti **tolygiai kintamuoju judėjimu.** Galima sakyti, kad tada materialus taškas juda x – o ašyje, tolygiai greitėdamas, pagreičiu a_x, y – o ašyje, tolygiai greitėdamas, pagreičiu a_y ir z – o ašyje, tolygiai greitėdamas, pagreičiu a_z.

Tolygiai kintamam judėjimui (kai $\vec{a}$=const.), tinka 2.2 paragrafo (7). Todėl to judėjimo greitis bet kuriuo laiko momentu t

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t. \qquad (13a)$$

Tolygiai kintamas judėjimas gali būti tiesiaeigis ir kreivaeigis. 2.3 paragrafe jau kalbėjome, kad, pavyzdžiui, nuo žemės paviršiaus išmesto kūno judėjimas gali būti tiese arba parabole, nors pagreitis abiem atvejais $\vec{a} = \vec{g}$ yra pastovus.

Suprojektavę (13a) į x – ų ašį, gauname:

$$v_x = v_{0x} + a_x t.$$

Kai kūnas (materialus taškas) juda tiesia linija x – ų ašyje, koordinatės y ir z nekinta. Tada projekcijų indeksą x galime dėl paprastumo atmesti. Tuomet rašome:

$$v = v_0 + at. \qquad (13b)$$

Žinome, kad nueitas kelias

$$S = v_{vid} \cdot t,$$

kur v_{vid} – vidutinis greitis. Pavaizdavę (13b) grafiškai (35a pav.), matome, kad

$$v_{vid} = \frac{v_0 + v}{2} = \frac{v_0 + v_0 + at}{2} = v_0 + \frac{at}{2}.$$

Tuomet $s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$. Kadangi S= x – x_0, kur x – kūno koordinatė bet kuriuo laiko momentu t, o x_0 – pradinė koordinatė (35b pav.), tai (pradinis laikas t_0 imamas lygus nuliui):

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}. \qquad (14)$$

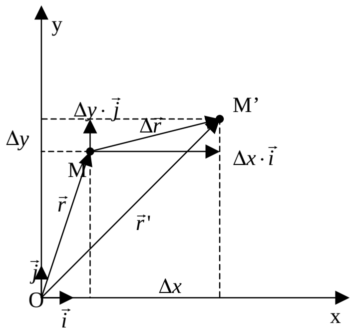
Dabar tą formulę galime taikyti kiekvienai koordinačių ašiai atskirai. Tada vėl reikės žymėti projekcijų indeksus, t.y. vietoj x_0, v_0 ir a atitinkamai imti x_0, v_{0x} ir a_x, y_0, v_{0y} ir a_y , z_0, v_{0z} ir a_z. Todėl rašome

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}, \\ y &= y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}, \\ z &= z_0 + v_{0z}t + \frac{a_z t^2}{2}. \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

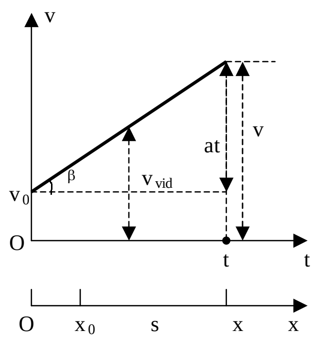
Gavome vienas pagrindinių mechanikos formulių. Jų pagalba galima išspręsti **pagrindinį** materialaus **taško mechanikos uždavinį:** *nustatyti jo padėtį erdvėje bet kuriuo laiko momentu.* Kaip matome išgautųjų formulių, tai galime padaryti, žinodami pradines taško koordinates x_0, y_0 ir z_0, pradinio greičio $\vec{v}_0$ projekcijas v_{0x}, v_{0y} ir v_{0z} ir pagreičio $\vec{a}$ projekcijas a_x, a_y *ir* a_z. Pradinės koordinatės ir pradinis greitis paprastai duodami uždavinio sąlygoje, o pagreitį (arba jo projekcijas) galima nustatyti, remiantis II Niutono dėsniu. Apie tai kalbėsime vėliau. Šį kartą pastebėsime, kad (15) judančio taško koordinatės x, y ir z, pradinės koordinatės x_0, y_0 ir z_0, pradinio greičio projekcijos v_{0x}, v_{0y} ir v_{0z} ir pagreičio projekcijos a_x, a_y *ir* a_z. lygiai taip pat (14) x, x_0, v_0 ir a gali būti ir teigiami, ir neigiami dydžiai. Pvz., kai (14) v_0 yra teigiamas, o a yra neigiamas, tai pasakymas „tolygiai greitėjantis“ judėjimas iš tikrųjų reikš tolygiai lėtėjantį judėjimą, nes tuomet greitis

$$v = v_0 + at. \qquad (16)$$

laikui bėgant mažės. Kai ne tik pagreitis a, bet ir greitis v_0 neigiamas, tai reikš, kad materialus taškas juda priešinga x – o ašiai kryptimi.



35 pav.



35a pav.

(15) yra atskiras materialaus taško kinematinių judėjimo lygčių (2) atvejis, kai pagreitis $\vec{a}$ yra pastovus. Galima būtų parodyti, kad tada materialus taškas visuomet juda vienoje plokštumoje, kurią nusako pradinio greičio $\vec{v}_0$ ir pagreičio $\vec{a}$ vektoriai. Tuomet, atitinkamai parinkus koordinačių sistemą, judančio materialaus taško padėtį galima nusakyti 2 – jų koordinačių pagalba. (2) ir (15) tada pakaktų imti tiktai 2 – jų lygčių sistemas. Tačiau ir tuo atveju galima naudotis (2) ir (15), imant pvz., z=0. Parašykime (2) tam atvejui:

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(t), \\ y &= f_2(t). \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Kadangi tomis lygtimis galima rasti judančio materialaus taško padėtį bet kuriuo laiko momentu, tai, per tuos taškus išvedę kreivę, gausime materialaus taško trajektoriją. Todėl į (17) galima žiūrėti ir kaip į **trajektorijos lygtį.** Tokios formos trajektorijos lygtis dažnai vadinama parametrine lygtimi, ir parametras čia yra laikas t. Dažniausiai trajektorijos lygtimi vadinamas betarpiškas ryšys tarp koordinačių x ir y, pvz.: y=f(x). Tai koordinatinės formos trajektorijos lygtis. Ją galima gauti, naudojantis (17). Reikia iš vienos tų lygčių, pvz., $x=f_1(t)$, laiką t išreikšti per x ir tą išraišką įrašyti į lygtį $y=f_2(t)$. Galimi ir kiti būdai.

Projektuodami (13a) į visas koordinačių ašis arba taikydami (16) kiekvienai koordinačių ašiai atskirai, galime rašyti:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v_{0x} + a_x t, \\ v_y &= v_{0y} + a_y t, \\ v_z &= v_{0z} + a_z t. \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Dabar (15) ir (18) pirmąsias lygtis dauginkime iš vienetinio vektoriaus $\vec{i}$, antrąsias iš $\vec{j}$, trečiąsias iš $\vec{k}$ ir po to (15) ir (18) atskirai panariui sudėkime. Tuomet, naudodamiesi vektoriniu metodu, gausime:

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \vec{r},$$
$$x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k} = \vec{r}_0, \qquad (\vec{r}_0 \text{ - pradinis radiusas vektorius})$$
$$v_{0x}\vec{i} + v_{0y}\vec{j} + v_{0z}\vec{k} = \vec{v}_0,$$
$$a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = \vec{a},$$
$$v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} = \vec{v}.$$

Vietoje (15) ir (18) gauname jų vektorinius pavidalus:

$$\left.\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}, \\ \vec{v} &= \vec{v}_0 + \vec{a}t, \\ \vec{a} &= \overrightarrow{const.} \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Apytiksliai tolygiai kintamu judėjimu juda, pradėdami važiuoti arba sustoti, traukiniai, mašinos, laivai, lėktuvai, raketos, kosminiai laivai. Taip juda arti Žemės paviršiaus išmestas kūnas, slaužiantis horizontalia arba nuožulnia plokštuma kūnas, įelektrintos dalelės vienalyčiame elektriniame lauke... Jeigu visi kūnai judėtų tolygiai kintamu judėjimu, tai visi mechanikos uždaviniai būtų išspręsti, ir jų bendras sprendimas būtų (19) lygtys. Tačiau didžioji dauguma kūnų gamtoje juda su kintamu pagreičiu (netolygiai kintamu judėjimu), ir tuomet (15), (18) arba (19) nebegalioja. Taip yra, pavyzdžiui, kai kūnai juda apskritimais, kai jie svyruoja. Su kintamu pagreičiu juda visi dangaus kūnai, kosminiai laivai, molekulės ir t.t. Tiktai vidurinėje mokykloje daugiausia apsiribojama tolygiai kintamų judėjimų nagrinėjimu.

Pratybos

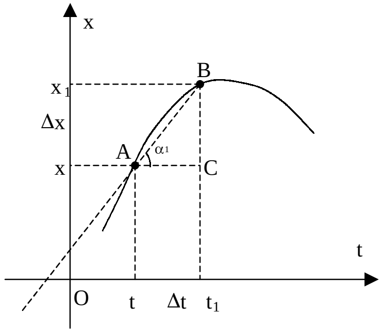
1. Kranas kūną iš cecho kampo pakėlė 2 m į aukštį, nunešė 3m skersai ir 6m išilgai cecho. Raskite kūno atstumą nuo minėtojo kampo. (Ats.: 7m).
2. 72km/h greičiu važiuojančiame traukinyje, bėgdama skersai vagono 4m/s greičiu, mergaitė išmetė aukštyn kamuoliuką 5m/s greičiu. Koks tuo momentu kamuoliuko greitis vagono ir žemės atžvilgiu? (Ats.: $\sqrt{41}$ m/s ir 21m/s).
3. Automobilio pradinis greitis buvo 18km/h. Važiuodamas $2m/s^2$ pagreičiu, jis po 20 s buvo pravažiavęs pro medį ir nuvažiavęs dar 400m. Koks buvo jo greitis tuo momentu? Kurs jis buvo pradiniu momentu? (Ats.:162km/h, neprivažiavęs iki medžio 100m).
4. Materialaus taško pradinės koordinatės x_0=1m, y_0=-1m, z_0=2m, pradinio greičio projekcijos v_{0x}=-1m/s, v_{0y}=2m/s, v_{0z}=-2m/s ir pagreičio projekcijos $a_x=2m/s^2$, $a_y=-2m/s^2$, $a_z=4m/s^2$. Raskite taško koordinates ir greičio didumą laiko momentu t=6s. (Ats.: x=31m, y=-25m, z=62m, v=26,55m/s).
5. Kūno $x = v_{0x}t,\ z = h + v_{0z}t - \frac{gt^2}{2},\ y = 0.$ Kokį judėjimą vaizduoja tos lygtys, kokia trajektorija? Nubrėžkite jos grafiką. (Ats.: Kūnas išmestas iš aukščio h kampu, kurio $tg\alpha = \frac{v_{0z}}{v_{0x}}$ su horizontu, parabolė $z = \frac{v_{0z}}{v_{0x}} + h - \frac{g}{2v_{0x}^2}x^2$).
6. Kūno: 1) x=a sinα, y=a cosα 2) x=a $\sin^2\alpha$, y=a $\cos^2\alpha$. Raskite pradines koordinates ir trajektorijas. (Ats.: x_0=0, y_0=a, apskritimas $x^2 + y^2 = a^2$ ir tiesė x + y = 0).
7. Gaukite formulę (14) integruodami.
8. Duotos materialaus taško koordinatės:

$$\begin{cases} x = 2t, \\ y = 4 + t^3; \end{cases}$$

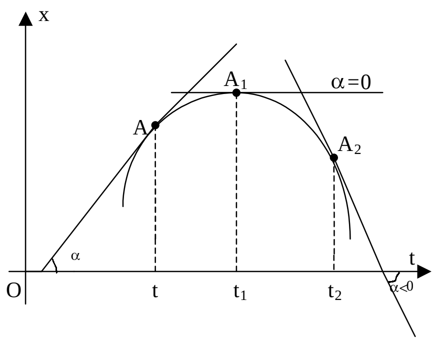
(x ir y matuojamos metrais, t – sek.). Išnagrinėkite judėjimą (raskite pradinę padėtį, greitį $\vec{v}$, pradinį greitį $\vec{v}_0$, jų didumus, pagreitį $\vec{a}$, pradinį pagreitį $\vec{a}_0$, jų didumus, trajektorijos lygtį y=f(x). Nubrėžkite trajektoriją ir $\vec{v}_0$ (panaudokite funkcijų diferencijavimo metodą). (Ats.: $\vec{v}_0 = 2\vec{i}$, $a = 6t(m/s^2)$).

2.5 Grafinis metodas

Kartais, dažniau technikoje, negalima analitiškai nustatyti kokio nors kūno, pvz., mechanizmo detalės, padėtį, tačiau prietaisais galima gauti tos dalelės padėties priklausomybės nuo laiko grafiką.



36 pav.



37 pav.

Apsiribosime tiesiaeigių judėjimų tyrimu. Tuomet judančio materialaus taško padėtį nusakys viena koordinatė. Tegul tai bus x – o koordinatė, o jos grafikas $x = f_1(t)$ tegul bus pavaizduotas 36 pav. Toks grafikas vadinamas **judėjimo grafiku.** Jeigu laiko momentu t materialaus taško koordinatė buvo x, o laiko momentu t_1 koordinatė buvo x_1, tai iš brėžinio matome, kad vidutinis taško greitis laikotarpiu $\Delta t = t_1 - t$ yra

$$v_{vid} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = tg\alpha_1. \qquad (1)$$

Kai $\Delta t \to 0$, taškas B artėja prie taško A, ir styga AB artėja prie į liestinę taške A (37 pav.). Todėl tikras greitis laiko momentu t

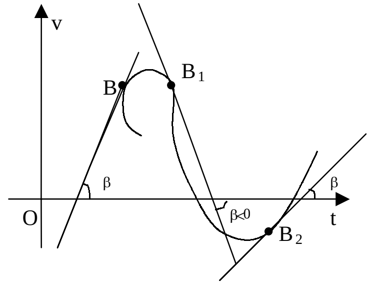
$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = tg\alpha, \qquad (2)$$

kur α yra kampas tarp judėjimo grafiko lietėjos ir laiko ašies. Laikui bėgant, kampas α, o tuo pačiu ir greitis v kinta. Pvz., laiko momentu t_1 $\alpha=0$ (v=0), laiko momentu t_2 α yra neigiamas (v<0) ir t.t. Nubrėžę lietėjas visuose grafiko taškuose, pagal (2) galime rasti greitį v visais laiko momentais. Kai v>0, materialus taškas juda x – o ašies kryptimi, kai v<0 – priešinga x – o ašiai kryptimi. Taigi, v (2), kaip jau ir anksčiau esame sakę, reiškia greičio vektoriaus $\vec{v}$ projekciją į x – o ašį.

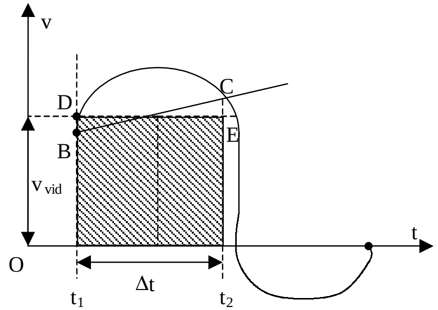
Judėjimo grafiko nereikia painioti su judančio taško trajektorija. Judėjimo grafikas, kaip matome, gali būti sudėtinga kreivė, o trajektorija, kaip iš pradžių sakėme, yra tiesė x – o ašyje. Bendruoju atveju, žinoma, ir trajektorija gali būti bet kokia kreivė. Tuomet 37 pav. reikš tik vienos koordinatės grafiką, v reikš $v_x$ir, norint gauti greitį, iš $y=f_2(t)$ grafiko reikės rasti v_y ir iš $z=f_3(t)$ rasti v_z. Tačiau ir tada tie grafikai nereikš trajektorijos. Trajektorija yra viena, o judėjimo grafikai bus net trys.

Jeigu mes, užuot nagrinėję $x = f_1(t)$, nagrinėtume grafiką $l=f(t)$, kur l yra judančio materialaus taško atstumas išilgai trajektorijos, tai aukščiau aprašytu metodu gautume greičio projekciją į trajektorijos lietėjos vienetinį vektorių $\vec{\tau}$ (žr. 2.2 paragrafą).

Remiantis (2), galima nurodyti funkcijos $x = f_1(t)$ išvestinės geometrinį arba grafinį skaičiavimo būdą: funkcijos išvestinė duotajame taške lygi tangentui kampo, kurį tame taške sudaro lietėja su argumento ašimi.



38 pav.

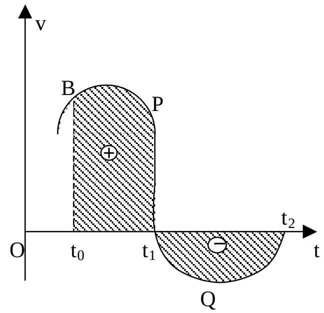


39 pav.

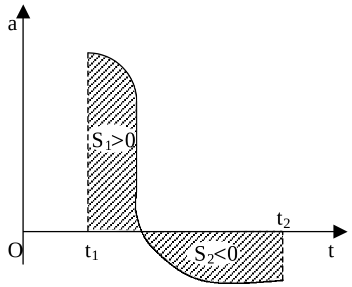
Kaip matėme, iš judėjimo grafiko galima rasti greitį v visais laiko momentais. Tai reiškia, kad mums bus žinoma funkcija v=f(t). Tuomet galime nubrėžti tos funkcijos grafiką (38 pav.). toks grafikas vadinamas greičio grafiku. Greičio grafiką jau brėžėme 35a pav. Kadangi greičio grafikas pagal apibrėžimą nuo judėjimo grafiko skiriasi tik tuo, kad vietoje koordinatės x yra greitis v, tai iš to išplaukia, kad pagreitis

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = tg\beta, \qquad (3)$$

kur β yra kampas tarp greičio grafiko lietėjos ir laiko ašies. Išvedę lietėjas visuose greičio grafiko taškuose, pagal (3) gausime pagreitį bet kuriuo laiko momentu (tiksliau – pagreičio $\vec{a}$ projekciją į x – o ašį).



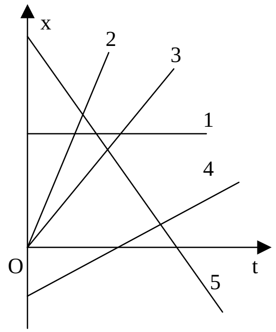
40 pav.



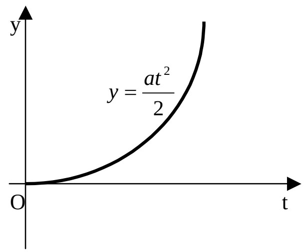
41 pav.

Iš (1) matome, kad koordinatės pokytis Δx per mažą laiko tarpą $\Delta t = t_2 - t_1$ yra: $\Delta x = v_{vid} \cdot \Delta t$. Iš 39 pav. matyti, kad jis yra lygus stačiakampio t_1Det_2 plotui. Taškai B ir C guli greičio v grafike – laiko momentais t_1 ir t_2. Taškai D ir E yra šalia greičio grafiko. Kai $\Delta t \to 0$ ir $v_{vid} \to v$, tas stačiakampis darosi nykstamai siauras, o jo plotas artėja į plotą, kurį iš viršaus riboja lankas BC. Todėl koordinatės pokytis per laikotarpį $t_2 - t_0$ (40 pav.) yra lygus figūrų $t_0BPt_1t_0$ ir $t_1t_2Qt_1$ plotų algebrinei sumai. Pirmosios figūros plotas teigiamas, o antrosios figūros plotas – neigiamas, nes laikotarpiu $t_2 - t_1$ greičio projekcija v yra neigiama. Tuo laikotarpiu materialus taškas juda priešinga x – o ašiai kryptimi, ir koordinatė x mažėja. Imdami aritmetinę figūrų plotų sumą (visus plotus laikydami teigiamais), vietoje koordinatės pokyčio gautume nueitą kelią per laiko tarpį $t_2 - t_0$.

Iš kreivaeigio judėjimo greičio grafiko pagal (3) gautume tangentinį pagreitį.



42 pav.



43 pav.

Iš greičio grafiko suradę pagreitį a bet kuriuo laiko momentu, galime nubraižyti dar vieną grafiką – **pagreičio grafiką** (41 pav.). Remiantis (3) ir analogija su greičio grafiku, nesunku matyti, kad 41 pav. algebrinė plotų S_1 ir S_2 suma yra greičio v pokytis per laiko tarpį $t_2 - t_1$.

Tangentai kampų, kuriuos sudaro pagreičio grafiko lietėjos su laiko ašimi, reiškia pagreičio kitimo greitį atitinkamais laiko momentais. Tačiau mes tų lietėjų nebraižome, nes tik ką minėtas dydis mechanikoje beveik nenaudojamas.

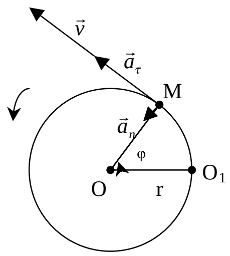
Koordinatę matuodami metrais, o laiką sekundėmis, greitį gauname m/s, o pagreitį m/s^2. Naudojantis grafiniu metodu, visada reikia nepamiršti, kokiu masteliu grafikai yra nubraižyti, t.y. kiek metrų atitinka, pavyzdžiui, 1cm ilgio atkarpa x – o ašyje ir kiek sekundžių atitinka 1 cm ilgio atkarpa laiko ašyje.

Pratybos

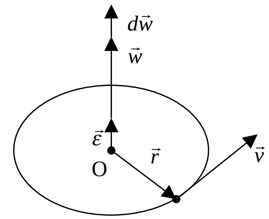
1. Nustatykite, kokius judėjimus vaizduoja šie judėjimo grafikai (42 ir 43 pav.).
2. Dar kartą nubrėžkite tiesiaeigiai judančio ir tolygiai greitėjančio kūno greičio $v=v_0+at$ grafiką, ir, juo remdamiesi, patys gaukite kūno koordinatę $x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$.
3. Nubraižykite tiesiaeigiai judančio ir tolygiai greitėjančio kūno pagreičio a=const. Grafiką ir, juo remdamiesi, gaukite kūno greitį $v=v_0+at$.

2.6 Kampinis greitis ir pagreitis

Gamtoje kreivaeigis judėjimas sutinkamas dažniau negu tiesiaeigis. Panagrinėkime kai kuriuos paprastesnius atvejus. Tegul taškas M juda apskritimu (44 pav.). Koordinačių pradžia pasirinkime nejudantį spindulį OO_1. Spindulio OM padėtį nusakys kampas φ, kuris yra laiko funkcija φ(t): φ=φ(t). Tą lygtį galima vadinti taško M judėjimo lygtimi. Norint įvertinti šią priklausomybę kiekybiškai, patogu įvesti spindulio, nusakančio taško padėtį, kampinio greičio ω sąvoką. Kampinio greičio kiekybinio kitimo nusakymui patogu naudoti kampinio pagreičio ε sąvoką. Apibrėžkime šias sąvokas.



44 pav.



45 pav.

Tegul per laiko tarpą Δt kampas φ pasikeičia dydžiu Δφ. Tuomet spindulio r=MO vidutinį kampinį greitį galėsime išreikšti taip:

$$\omega_{vid} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Atskirais laiko momentais kampinis greitis galėjo keistis. Norint surasti momentinį kampinį greitį, reikia imti labai mažą laiko tarpą dt. Tuomet vidutinis kampinis greitis artės prie momentinio ir jį galėsime užrašyti taip:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}. \qquad (1)$$

Žinome, kad toks užrašymas reiškia vidutinio kampinio greičio ribą, kai Δt→0 ir ji yra vadinama kampo φ išvestine pagal laiką.

Visiškai analogiškai yra apibrėžiama ir spindulio OM kampinio pagreičio sąvoka. Jeigu jį žymėsime raide ε, tai

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \qquad (2)$$

Dešinioji lygybės pusė žymi, kad kampinis pagreitis yra antroji kampo išvestinė pagal laiką. Jeigu taško M nueitą kelią O_1M pažymėsime s, tai jo greitis

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(r\varphi)}{dt} = r\frac{d\varphi}{dt} = r\omega. \qquad (3)$$

Anksčiau 2.2 paragrafe matėme, kad kai materialus taškas juda su pagreičiu bet kokia trajektorija, tai jo pagreitį galima išreikšti normaliniu pagreičiu $\vec{a}_n$ ir tangentiniu pagreičiu $\vec{a}_\tau$:

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau,$$

kur $|\vec{a}_n| = a_n = \frac{v^2}{r}$ ir $|\vec{a}_\tau| = a_\tau = |\frac{dv}{dt}|$; (žr. 2.2 paragrafo (14)).

Apskritimu judančio taško tangentinį ir normalinį pagreičius išreikšime per kampinį greitį ir kampinį pagreitį:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(r\varphi) = r\frac{d^2\varphi}{dt^2} = r\varepsilon; \qquad (4)$$

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{r^2\omega^2}{r} = \omega^2 r. \qquad (5)$$

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \qquad (6)$$

Taško judesys spindulio r apskritimu bus pilnai apibūdintas, jeigu bus duota: kampinis greitis ω (arba linijinis v), plokštuma, kurioje yra apskritimas ir sukimosi kryptis. Pastaroji charakteristika yra būtina, nes nagrinėjamoje plokštumoje sukimasis gali vykti dviem priešingomis kryptimis.

Visas šias tris charakteristikas galima nusakyti vienu vektoriumi $\vec{\omega}$, jeigu susitarsime tą vektorių išvesti statmenai į sukimosi plokštumą ir jam priskirsime tam tikrą kryptį, surištą su sukimosi kryptimi. Krypties pasirinkimui sutarta naudotis dešiniosios rankos taisykle: jeigu dešine ranka apimsime statmeną sukimosi plokštumai vektoriaus liniją taip, kad keturi pirštai rodytų sukimosi kryptį, tai jiems statmenas nykštys rodys vektoriaus $\vec{\omega}$, kurį vadinsime kampinio greičio vektoriumi, kryptį. Pasinaudoję vektorinės sandaugos apibrėžimu (1.5 paragrafas), galėsime patogiai susieti linijinio greičio vektoriaus $\vec{v}$ su kampinio greičio vektoriumi $\vec{\omega}$ ir radiusu vektoriumi $\vec{r}$, nustatančiu materialaus taško padėtį sukimosi ašies atžvilgiu. Iš 45 pav. matyti, kad

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \cdot \vec{r}], \qquad (7)$$

o jo modulis v=ω r.

Apibrėžus kampinio greičio vektorių, kampinio pagreičio vektorius apibrėžiamas analogiškai linijiniam pagreičiui:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \qquad (8)$$

Taigi $\vec{\varepsilon}$ kryptis sutampa su kampinio greičio pokyčio vektoriaus kryptimi. Taškui judant toje pačioje plokštumoje apskritimu, kampinio pagreičio vektorius $\vec{\varepsilon}$ bus lygiagretus vektoriui $\vec{\omega}$ ir jo kryptis bus tokia pati kaip ir $\vec{\omega}$, jeigu sukimasis yra greitėjantis ir priešinga – jeigu sukimasis lėtėjantis.

Pasinaudoję (7) lygtimi ir linijinio pagreičio apibrėžimu gauname:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}[\vec{\omega}\vec{r}] = [\frac{d\vec{\omega}}{dt} \cdot \vec{r}] + [\vec{\omega} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}] = [\vec{\varepsilon}\vec{r}] + [\vec{\omega}\vec{v}];$$
$$\vec{a} = [\vec{\varepsilon}\vec{r}] + [\vec{\omega}\vec{v}]. \qquad (9)$$

(9) formulės dedamosios atitinka tangentinį ir normalinį pagreičius. Vektorius $[\vec{\varepsilon}\vec{r}]$ yra trajektorijos liestinė ir turi tangentinio pagreičio kryptį ir dydį, lygų εr:

$$\vec{a}_\tau = [\vec{\varepsilon}\vec{r}]. \qquad (10)$$

Vektorius $[\vec{\omega}\vec{v}]$ yra nukreiptas lygiagrečiai radiusui vektoriui $\vec{r}$ link sukimosi centro ir jo ilgis lygus ω v=ω ^{2}r. Taigi jis sutampa su normaliniu pagreičiu:

$$\vec{a}_n = [\vec{\omega}\vec{v}]. \qquad (11)$$

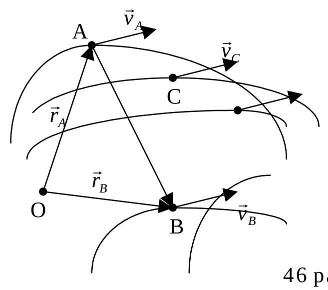
Sukimasis laikomas tolyginiu, jeigu kampinio greičio didumas yra pastovus ir tolygiai kintamu, jeigu kampinio pagreičio didumas yra pastovus. Šiais atvejais kampinio kelio φ ir kampinio greičio ω formulės yra analogiškos taško tiesiaeigio judėjimo kelio ir greičio formulėms (žr. 2.4 paragrafo (14) ir (16)):

$$\left.\begin{array}{l} \varphi = \omega t + \varphi_0; \\ (\varepsilon = 0, \omega = const) \\ \begin{cases} \omega = \omega_0 + \varepsilon t; \\ \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \dfrac{\varepsilon t^2}{2}. \end{cases} \\ (\varepsilon = const) \end{array}\right\} \qquad (12)$$

Čia φ_0 ir ω_0 yra pradinės kampo ir kampinio greičio vertės, o t yra judėjimo laikas. Kampinis pagreitis ε>0, jeigu sukimasis yra greitėjantis ir ε<0, jeigu sukimasis lėtėjantis

2.7 Slenkamasis kietojo kūno judėjimas ir sukimasis apie nejudamą ašį

Kampinio greičio ir kampinio pagreičio sąvokos daugiausia yra naudojamos nagrinėjant kietojo (dar sako“absoliučiai kietojo“) kūno judėjimą. Kietasis kūnas yra toks, kuriame atstumas tarp bet kurių dviejų jo taškų, jam judant, nesikeičia (kūnas nesideformuoja). Paprasčiausias kietojo kūno judėjimas yra **slenkamasis**. Slenkamasis judėjimas yra toks, kai visų kūno taškų greičiai ir pagreičiai lygūs (46 pav.):



46 pav.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}_A = \vec{v}_B = \vec{v}_C = ... = \vec{v}, \\ \vec{a}_A = \vec{a}_B = \vec{a}_C = ... = \vec{a}. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Arba

$$\frac{d\vec{r}_A}{dt} = \frac{d\vec{r}_B}{dt}; \frac{d\vec{r}_B}{dt} - \frac{d\vec{r}_A}{dt} =$$
$$= \frac{d}{dt}(\vec{r}_B - \vec{r}_A) = \frac{d(\overrightarrow{AB})}{dt} = 0;$$

Todėl vektorius $\overrightarrow{AB}$=const.

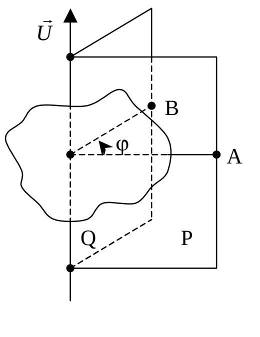
Vadinasi, visos su kūnu susietos atkarpos juda lygiagrečiai sau, nekeičia krypties. Visų taškų trajektorijos vienodos ir vienodai orientuotos. Tokio kūno judėjimą nusako bet kurio vieno taško judėjimas. Lygybė

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

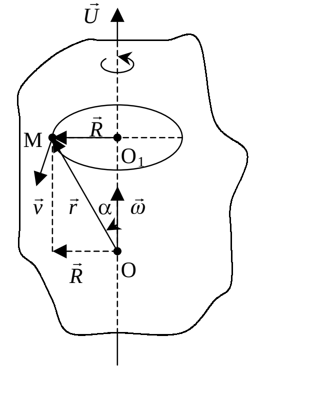
nusakantis to taško padėtį erdvėje bet kuriuo laiko momentu, jo **judėjimo lygtis.** Turime vieno taško kinematiką. Tinka visa jau aprašyta kinematikos teorija. Kiekvienas kūno taškas gali judėti tiesiaeigiai, kreivaeigiai, apskritimu, elipse, greitėjančiai, lėtėjančiai ir t.t.

Slenkamuoju judėjimu juda eskalatorių laipteliai, dviračio pedalas, kabančios kabinos atrakcionuose ir kt. Kūnai, kai nekinta jų orientacija erdvėje.

Jeigu kietasis kūnas juda taip, kad jo taškai, gulintys ant kažkokios ašies U, yra nejudantys, o visi kiti taškai juda, tai sakysime, kad kūnas sukasi apie nejudamą ašį U.



47 pav.



48 pav.

Sutarkime ką vadinsime kieto kūno pasisukimo kampu φ. Tuo tikslu išveskime per sukimosi ašį plokštumą P, kurią laikysime nejudama ir antrą plokštumą Q , nekintamai susietą su mūsų kūnu (47 pav.). Kūnui sukantis plokštuma Q sudarys kintantį dvisienį kampą su nejudama plokštuma P. Šis dvisienis kampas yra matuojamas plokščiu kampu φ, kurį mes ir laikysime kūno pasisukimo kampu. Kampas φ laikomas teigiamu, jeigu žiūrint iš ašies $\vec{U}$ galo sukimąsi matome vykstantį prieš laikrodžio rodyklę.

$$\varphi = \varphi(t),$$

kaip ir 2.6 paragrafe, bus judėjimo lygtis.

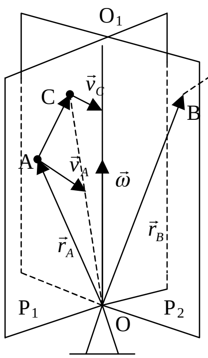
Turėdami kieto kūno, besisukančio apie nejudamą ašį, pasisukimo kampo apibrėžimą, kampinį greitį ir kampinį pagreitį apibrėšime visiškai taip pat, kaip ir taško, judančio apskritimu, atveju. Tiks 2.6 paragrafo (4), (5), (7), (9) formulės. Jų neperrašinėsime, tik patikslinsime (7) greičio formulę.

$$\vec{v} = [\vec{\omega}\vec{r}] = [\vec{\omega}\vec{R}], \tag{3}$$

mat v=ω r sinα=ω R (48 pav.). Todėl (3) vektorius $\vec{r}$ gali būti išvestas iš bet kurio nejudamos ašies taško.

2.8 Kietojo kūno sukimasis apie nejudamą tašką. Bet koks kietojo kūno judėjimas

Dažnai būna, kai vienas kūno taškas yra įtvirtintas: vilkelis, techninės detalės, įvairūs žaisliukai. Tada kūnas sukasi apie tą tašką.



49 pav.

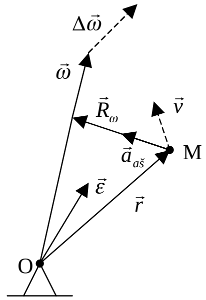
Tegul nejudamas kietojo kūno taškas yra O (49 pav.). Visi kiti taškai gali judėti. Parinkime du judančius kietojo kūno taškus A ir B, kurių greičiai $\vec{v}_A$ ir $\vec{v}_B$. Tegul tie greičiai nelygiagretūs. Per radiusą vektorių $\vec{r}_A$ išveskime plokštumą P_1 statmeną greičiui $\vec{v}_A$, o per radiusą vektorių $\vec{r}_B$ - plokštumą P_2, statmeną greičiui $\vec{v}_B$. Plokštumoje P_1 parinkime dar vieną kietojo kūno tašką C. Vektorius $\vec{v}_A$ statmenas su vektoriais $\vec{r}_A$ ir $\overrightarrow{AC}$. Todėl taško greitis $\vec{v}_C$ taip pat turi būti statmenas su vektoriumi $\overrightarrow{AC}$, nes priešingu atveju keistųsi atstumas AC, kas kietajame kūne negalima. Dėl tos pat priežasties greitis $\vec{v}_C$ turi būti statmenas ir su $\overrightarrow{OC}$. Vadinasi, greitis $\vec{v}_C$ taip pat statmenas plokštumai P_1, kaip ir greitis $\vec{v}_A$. Analogiškai visų plokštumos P_2 taškų greičiai statmeni plokštumai P_2. Plokštumų P_1 ir P_2 susikirtimo linija OO_1 priklauso abiem plokštumom. Todėl toje linijoje esančių taškų greičiai tuo pat metu turi būti statmeni abiem plokštumom (P_1 ir P_2). Kadangi tai neįmanoma, tai linijos OO_1 taškų greičiai lygūs nuliui. Vadinasi linija OO_1 nejuda. Galima tvirtinti, kad duotu momentu kūnas sukasi apie ašį OO_1. Todėl OO_1 vadinama **momentine sukimosi ašimi.** Įrodėme **Eulerio ir Dalambero teoremą,** kurią galime taip suformuluoti: *kietas kūnas, turintis nejudamą tašką, kiekvienu laiko momentu sukasi apie ašį, einančią per tą tašką.* Sukimosi apie momentinę ašį kampinį greitį, kaip ir anksčiau, pažymėkime $\vec{\omega}$. Jis vadinamas **momentiniu kampiniu greičiu.** Laikui bėgant, momentinė sukimosi ašis keičiasi. Todėl momentinis kampinis greitis $\vec{\omega}$ gali keisti ne tik didumą, bet ir kryptį. Bet 2.7 paragrafo (3) lieka galioti: bet kokio taško M kietajame kūne greitis:

$$\vec{v} = [\vec{\omega}\vec{r}]. \tag{1}$$

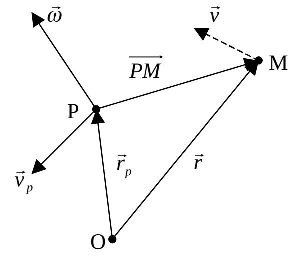
Lieka galioti ir 2.6 paragrafo (9): taško M pagreitis

$$\vec{a} = [\vec{\varepsilon}\vec{r}] + [\vec{\omega}\vec{v}]. \tag{2}$$

Tiktai kadangi $\vec{\omega}$ dabar kinta didumas ir kryptis, tai kampinis pagreitis $\vec{\varepsilon} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$ negulės momentinėje sukimosi ašyje, o sudarys su ja bendru atveju bet kokį kampą β (50 pav.).



50 pav.



51 pav.

Todėl $[\vec{\varepsilon}\vec{r}]$ dabar nebus tangentinis pagreitis. Jis vadinamas **sukamuoju pagreičiu** ir gali būti įvairių krypčių:

$$\vec{a}_{suk} = [\vec{\varepsilon}\vec{r}]. \tag{3}$$

Antrasis pagreičio $\vec{a}$ dėmuo $[\vec{\omega}\vec{v}]$, kaip ir 2.6 paragrafe, nukreiptas statmenai link sukimosi ašies (šį kartą link momentinės sukimosi ašies) ir vadinamas **ašiniu pagreičiu:**

$$\vec{a}_{aš} = [\vec{\omega}\vec{v}]; \tag{4}$$

$a_{aš}$=ω v=ω ·ω R_ω. Kadangi $\vec{a}_{aš}$ kryptis sutampa su vektoriaus $\vec{R}_\omega$ kryptimi, tai

$$\vec{a}_{aš} = \omega^2 \vec{R}_\omega, \tag{5}$$

o visas taško M pagreitis

$$\vec{a} = [\vec{\varepsilon}\vec{r}] + \omega^2 \vec{R}_\omega. \tag{6}$$

Ši lygybė išreiškia **Rivalso teoremą.**

Kampas tarp sukamojo pagreičio $\vec{a}_{suk}$ ir ašinio pagreičio $\vec{a}_{aš}$ nėra status, todėl ieškant viso pagreičio $\vec{a}$, negalima remtis Pitagoro teorema.

Bendruoju atveju kietajame kūne nėra nė vieno nejudančio taško. Kūnas slenka ir sukasi arba, pasakytume, skrenda ir vartosi, lyg lėktuvas. Galima parodyti, kad tada kietojo kūno bet kurio taško M greitis (51 pav.):

$$\vec{v} = \vec{v}_p + [\vec{\omega} \cdot \overrightarrow{PM}]. \tag{7}$$

Čia $\vec{\omega}$ - momentinis kampinis kietojo kūno greitis, P – laisvai parenkamas kietojo kūno taškas, vadinamas **poliumi,** $\vec{v}_p$ - poliaus greitis, O – nejudantis atskaitos taškas. (7) nuo (1) skiriasi tuo, kad vietoj radiuso vektoriaus $\vec{r}$, išvesto iš nejudamo taško, dabar yra vektorius PM, išvestas iš judamo poliaus. Be to, (7) dar yra poliaus greitis $\vec{v}_p$. (7) mes įrodysime 2.9 paragrafe.

(7) galima taip įprasminti: *bet koks kietojo kūno judėjimas yra momentinis slenkamasis judėjimas poliaus greičiu ir momentinis sukimasis apie polių.*

Dar galima įrodyti, kad visada galima rasti tokį polių P (tokį $\vec{r}_p$), kad $\vec{\omega}$ ir $\vec{v}_p$ būtų vienoje tiesėje. Toks polius juda išilgai momentinės sukimosi ašies. Toks $\vec{\omega}$ ir $\vec{v}_p$ derinys vadinasi **kinematinis sraigtas.** Tiesė, kurioje guli $\vec{\omega}$ ir $\vec{v}_p$, vadinama sraigto ašimi. Laikui bėgant, sraigto ašis kinta. Taigi, galima dar tvirtinti, kad *bet koks kietojo kūno judėjimas yra momentinis sraigtinis judėjimas.*

Bet kurio taško M pagreitį $\vec{a}$ rastume diferencijuodami (7) lygybę laiko atžvilgiu. Gautume, kad

$$\vec{a} = \vec{a}_p + \vec{a}_{suk} + \vec{a}_{aš}. \qquad (8)$$

Čia $\vec{a}_p$ - poliaus pagreitis, o $\vec{a}_{suk}$ ir $\vec{a}_{aš}$ - jau mūsų matyti sukamasis ir ašinis pagreičiai.

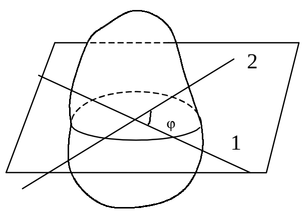
2.9 Plokštumai lygiagretus judėjimas

Kieto kūno judėjimas, kai kiekvieno jo taško trajektorija yra plokštumoje, lygiagrečioje kažkokiai nejudamai plokštumai, yra vadinamas plokštumai lygiagrečiu judėjimu. Taip judančio kūno visų taškų trajektorijos yra plokščios ir jų plokštumos lygiagretės nejudamai plokštumai, kuri yra vadinama judėjimo plokštuma.

Tokia judėjimo rūšis yra sutinkama gana dažnai, pvz., ratų judėjimas bėgiais, švaistiklio judėjimas ir t.t. Tai atskiras atvejis jau aptarto kietojo kūno bet kokio judėjimo.

Plokščiai lygiagretaus judėjimo atveju visų taškų, gulinčių tiesėje, statmenoje judėjimo plokštumai, greičiai ir pagreičiai tarpusavyje yra lygūs. Iš čia seka, kad nagrinėjant tokiu būdu judantį kūną, užtenka išnagrinėti vieno jo pjūvio, lygiagretaus judėjimo plokštumai judėjimą. Judėjimo plokštumą galime parinkti bet kuriame kūno pjūvyje, o tai reiškia, kad užtenka išnagrinėti plokščios figūros judėjimą plokštumoje.

Panagrinėkime tokį judėjimą. Pradžioje išsiaiškinkime, ką vadinsime plokštumai lygiagretaus judėjimo pasisukimo kampu. Nesunku įrodyti, kad šiuo atveju bet kuri tiesė, nejudamai surišta su kūnu ir gulinti judėjimo plokštumoje, per tą patį laiką pasisuka ta pačia kryptimi ir tokiu pat kampu.



52 pav.

Tegul judant kūnui kokiu nors momentu t_1 pasirinktoji tiesė judėjimo plokštumoje užėmė padėtį 1, o laiko momentu t_2 ji užima padėtį 2 (52 pav.). Kampas φ tarp šių dviejų tiesės padėčių ir yra laikomas plokštumai lygiagrečiu judėjimu judančio kūno pasisukimo kampu per laiko tarpą $t_2 - t_1$. Tokio judėjimo nagrinėjimui patogu pasirinkti koordinačių sistemą judėjimo plokštumoje ir surasti bet kurio kūno taško koordinates bei kūno pasisukimo kampą bet kuriuo laiko momentu: $x=x(t)$, $y=y(t)$ ir $\varphi=\varphi(t)$. Kampinis greitis ir kampinis pagreitis yra apibrėžiami taip pat, kaip ir taško judančio apskritimu atveju arba kietojo kūno, besisukančio apie nejudamą ašį, atveju.

Suraskime ryšį tarp bet kurių dviejų kūno taškų greičių plokštumai lygiagretaus judėjimo atveju. Prieš tai įrodykime pagalbinę teoremą(lemą): vektoriaus, nekintamai surišto su judančiu kūnu ir turinčio pastovų ilgį, išvestinė pagal laiką yra lygi kampinio greičio ir to vektoriaus vektorinei sandaugai, t.y.

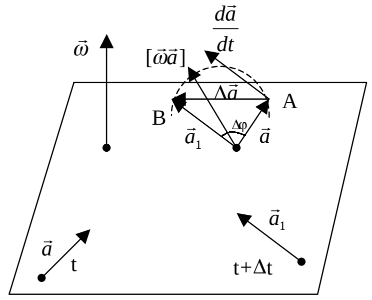
$$\vec{a}' = \frac{d\vec{a}}{dt} = [\vec{\omega}\vec{a}]. \qquad (1)$$

Įrodykime šią teoremą. Tegul laiko momentu t vektoriaus padėtis yra $\vec{a}$, o laiko momentu t+Δt - $\vec{a}_1$. Pagal išvestinės apibrėžimą:

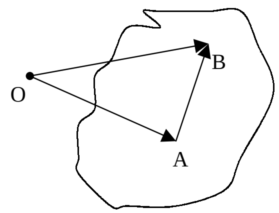
$$\vec{a}' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{a}}{\Delta t}.$$

Kadangi vektoriaus $\vec{a}$ ilgis nesikeičia, tai jo išvestinės vektorius sutaps su spindulio a apskritimo liestine ir bus statmenas į $\vec{a}$. Be to, ta išvestinė $\vec{a}' \perp \vec{\omega}$ (53 pav.). Raskime išvestinės $\vec{a}'$ modulį:

$$|\vec{a}'| = |\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{a}}{\Delta t}| = \lim_{\Delta t \to 0} |\frac{\Delta \vec{a}}{\Delta t}| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\cup AB}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{a\Delta\varphi}{\Delta t} = a\frac{d\varphi}{dt} = a\omega.$$



53 pav.



54 pav.

Taigi vektorius $\vec{a}'$ yra statmenas vektoriams $\vec{\omega}$ ir $\vec{a}$ ir jo modulis lygus aω. Todėl, pasinaudoję vektorinės sandaugos apibrėžimu, galėsime parašyti:

$$\vec{a}' = [\vec{\omega}\vec{a}]$$

ir teoremą įrodėme.

Ši teorema analogiška 2.6 paragrafo (7) lygybei.

Dabar lengvai surasime minėtąjį dviejų kūno taškų greičių sąryšį. Parinkime du bet kuriuos figūros taškus A ir B (54 pav.). Taip pat laisvai pasirinkime bet kurį atskaitos tašką O ir išveskime vektorius $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{OB}$. Iš brėžinio matyti, kad $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$. Diferencijuodami šią lygybę laiko atžvilgiu, gausime:

$$\frac{d(\overrightarrow{OB})}{dt} = \frac{d(\overrightarrow{OA})}{dt} + \frac{d(\overrightarrow{AB})}{dt}$$

Pasinaudoję (1) teorema, galime parašyti:

$$\frac{d(\overrightarrow{AB})}{dt} = [\vec{\omega} \cdot \overrightarrow{AB}].$$

Be to,

$$\frac{d(\overrightarrow{OA})}{dt} = \vec{v}_A; \quad \frac{d(\overrightarrow{OB})}{dt} = \vec{v}_B.$$

Taigi

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + [\vec{\omega} \cdot \overrightarrow{AB}]. \qquad (2)$$

Šis sąryšis vadinamas **Eulerio formule.** Ji naudinga nagrinėjant įvairius plokštumai lygiagretaus judėjimo atvejus.

Ši formulė tinka ir bet kokiam kietojo kūno judėjimui. Be įrodymo mes ją buvo parašę 2.8 paragrafe.

Suraskime ryšį tarp dviejų figūros taškų pagreičių lygiagretaus plokštumai judėjimo atveju.

Diferencijuodami (2) lygybę laiko atžvilgiu gausime:

$$\frac{d\vec{v}_B}{dt} = \frac{d\vec{v}_A}{dt} + [\frac{d\vec{\omega}}{dt}\overrightarrow{AB}] + [\vec{\omega}\frac{d(\overrightarrow{AB})}{dt}].$$

Kaip žinome

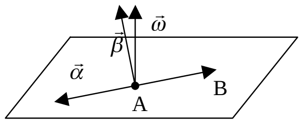
$$\frac{d\vec{v}_B}{dt} = \vec{a}_B; \frac{d\vec{v}_A}{dt} = \vec{a}_A; \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon},$$

gi kaip matėme

$$\frac{d(\overrightarrow{AB})}{dt} = [\vec{\omega}\cdot\overrightarrow{AB}].$$

Todėl gausime:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + [\vec{\varepsilon}\,\overrightarrow{AB}] + [\vec{\omega}[\vec{\omega}\overrightarrow{AB}]]. \qquad (4)$$



54a pav.

Suraskime vektoriaus $[\vec{\omega}[\vec{\omega}\overrightarrow{AB}]]$ paprastesnę išraišką. Pažymėkime vektorių $[\vec{\omega}\overrightarrow{AB}] = \vec{\beta}$. Šis vektorius guli figūros plokštumoje ir yra statmenas į $\vec{\omega}$ ir $\overrightarrow{AB}$.

Jeigu nubrėšime vektorių $\vec{\alpha} = [\vec{\omega}\vec{\beta}]$, tai jis irgi gulės figūros plokštumoje ir bus statmenas vektoriui $\vec{\beta}$. Vektorius $\vec{\alpha}$ su vektoriumi $\overrightarrow{AB}$ sudaro 180^0 kampą, todėl vektorius $\vec{\alpha} = [\vec{\omega}[\vec{\omega}\overrightarrow{AB}]] = -\omega^2\,\overrightarrow{AB}$.

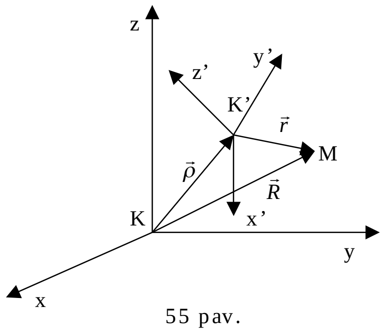
Tai įrašę į (4) galutinai gausime:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + [\vec{\varepsilon}\,\overrightarrow{AB}] - \omega^2\overrightarrow{AB}. \qquad (5)$$

III. SUDĖTINIS JUDĖJIMAS

3.1 Sudėtinis taško judėjimas

Judėjimas ir ramybė yra santykiniai arba reliatyvūs. Pavyzdžiui, ryšulys, padėtas vagone ant lentynos, vagono atžvilgiu yra rimtyje, o Žemės atžvilgiu juda traukinio greičiu. Vėjo nešamas balionas Žemės atžvilgiu juda vėjo greičiu, o oro atžvilgiu yra rimtyje. Važiuojančio automobilio rato ventilis automobilio atžvilgiu juda apskritimu, o rato atžvilgiu yra rimtyje, o kelio atžvilgiu juda sudėtinga trajektorija (cikloide). Taigi, judėjimą dažnai tenka nagrinėti įvairių atskaitos sistemų ir įvairių su jomis susietų koordinačių sistemų atžvilgiu. Tegul materialus taškas M juda sistemoje K’, kuri pati juda kitoje sistemoje K (55 pav.). Tokį judėjimą vadiname **sudėtiniu judėjimu.** Sistemą K santykinai laikysime nejudančia ir nustatysime ryšį tarp materialaus taško padėties, greičio ir pagreičio abiejose sistemose.



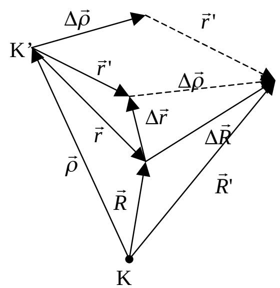
55 pav.

Nagrinėsime kol kas tik tokį atvejį, kai judančios sistemos K‘ koordinačių ašys, laikui bėgant, nekeičia krypties erdvėje, t.y. kai ta sistema juda **slenkamuoju judėjimu** (nesisuka) (žr. 2.7 paragrafą). Tuomet visų judančios sistemos taškų greičiai (ir pagreičiai) bet kuriuo laiko momentu tarpusavyje yra lygūs. Taip juda, pavyzdžiui, jau minėtas dviračio pedalas, tiesiai važiuojant, vanduo tiesioje, lygioje terpėje, traukinys tiesiame geležinkelio ruože ir pan.

Tegul judančios koordinačių sistemos K‘ padėtį nejudančios sistemos K atžvilgiu nusako radiusas vektorius $\vec{\rho}$, materialaus taško M padėtį judančioje sistemoje K‘ – radiusas vektorius $\vec{r}$ ir to taško padėtį nejudančioje sistemoje – radiusas vektorius $\vec{R}$. Iš brėžinio matome, kad

$$\vec{R} = \vec{r} + \vec{\rho}. \qquad (1)$$

Taško judėjimą judančios sistemos K‘ atžvilgiu vadiname **santykiniu** arba **reliatyviuoju judėjimu,** o paties taško judėjimą nejudančios sistemos K atžvilgiu – **absoliutiniu** judėjimu, o judančios sistemos judėjimą nejudančios sistemos atžvilgiu – **nešamuoju** judėjimu. Taško M greitį ir pagreitį judančios sistemos atžvilgiu vadiname **santykiniu** arba **reliatyviuoju greičiu** $\vec{v}_r$ ir **pagreičiu** $\vec{a}_r$, o greitį ir pagreitį nejudančios sistemos atžvilgiu – **absoliutiniu greičiu** $\vec{v}_a$ ir **pagreičiu** $\vec{a}_a$. To judančios sistemos taško, kuriame duotuoju laiko momentu yra judantis materialus taškas M, greitį ir pagreitį vadiname **nešimo greičiu** $\vec{v}_n$ ir **nešimo pagreičiu** $\vec{a}_n$. Kadangi mūsų atveju visų judančios sistemos taškų greičiai ir pagreičiai tarpusavyje lygūs, tai nešimo greičiu ir pagreičiu galima laikyti judančios sistemos pradžios taško K‘ greitį ir pagreitį. Tokiu būdu reliatyvųjį greitį ir pagreitį gauname, kintant vektoriui $\vec{r}$, tardami, kad taškas K‘ nejuda, nešimo greitį ir pagreitį – kintant vektoriui $\vec{\rho}$.



56 pav.

Tegul per nedidelį laiko tarpą Δt vektorius $\vec{r}$ dėl taško M reliatyviojo judėjimo perėjo į vektorių $\vec{r}\,'$ ir todėl pakito dydžiu $\Delta\vec{r}$ (56 pav.). Tegul dėl nešamojo judėjimo per tą laiką vektorius $\vec{\rho}$ pakito dydžiu $\Delta\vec{\rho}$. Vektorius $\vec{r}\,'$ mūsų atveju dėl nešamojo judėjimo nepakito, o tiktai lygiagrečiai sau pasislinko. Matome, kad vektoriaus $\vec{R}$ pokytis dėl absoliučiojo judėjimo

$$\Delta\vec{R} = \Delta\vec{r} + \Delta\vec{\rho}. \qquad (2)$$

Tuomet

$$\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{R}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{\rho}}{\Delta t}.$$

Pagal mūsų apibrėžimus

$$\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{R}}{\Delta t} = \vec{v}_a, \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \vec{v}_r, \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{\rho}}{\Delta t} = \vec{v}_n.$$

Todėl gauname

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_n. \qquad (3)$$

Absoliutinis greitis yra lygus reliatyviojo ir nešimo greičių vektorių sumai. Ta išvada vadinama **Galilėjaus greičių transformacija** (pereinant iš vienos koordinačių sistemos į kitą) arba klasikiniu greičių sudėties dėsniu. Jis galioja ir tada, kai judanti koordinačių sistema juda bet kaip – nebūtinai slenkamuoju judėjimu. Kai $\vec{v}_r$ ir $\vec{v}_n$ turi tą pačią kryptį, tai iš (3) gauname ryšį tarp greičių didumų:

$$v_a = v_r + v_n. \qquad (4)$$

Apie tą ryšį dar kalbėsime vėliau.

Analogiškai 56 pav., nubrėžus jį greičiams, galima būtų parodyti, kad

$$\Delta\vec{v}_a = \Delta\vec{v}_r + \Delta\vec{v}_n.$$

Tuomet

$$\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{v}_a}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{v}_r}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{v}_n}{\Delta t}.$$

Pagal mūsų apibrėžimus

$$\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{v}_a}{\Delta t} = \vec{a}_a, \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{v}_r}{\Delta t} = \vec{a}_r, \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{v}_n}{\Delta t} = \vec{a}_n.$$

Todėl gaunam, kad

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_n. \qquad (5)$$

Absoliutinis pagreitis yra lygus reliatyviojo ir nešimo pagreičių sumai. Ta išvada negalioja, kai sistema K‘ juda ne slenkamuoju judėjimu (pvz., kai ji slenka ir sukasi). Tuomet (5) dešinėje pusėje prisideda dar vadinamasis Koriolio pagreitis $\vec{a}_K$.

Kai sistema K‘ juda tiesia linija ir pastoviu greičiu, t.y. kai nešimo pagreitis $\vec{a}_n = 0$, iš (5) gauname, kad

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r. \qquad (6)$$

Tokią išvadą vadina **Galilėjaus pagreičių transformacija.** Ją galima ir taip pasakyti: *jeigu dvi atskaitos arba koordinačių sistemos viena kitos atžvilgiu juda tolyginiu judėjimu, tai bet kokio materialaus taško pagreičiai abiejose sistemose yra vienodi.* Bendruoju atveju tolygiai viena kitos atžvilgiu judančių sistemų gali būti kaip norima daug. Juk, jeigu sistema K‘ sistemos K atžvilgiu juda tiesia linija ir pastoviu greičiu ir jeigu kažkokia sistema K“ sistemos K‘ atžvilgiu juda tiesia linija ir pastoviu greičiu, tai nesunku suprasti, kad sistema K“ sistemos K atžvilgiu juda taip pat tiesia linija ir pastoviu greičiu. Siūlome patiems sugalvoti tokių sistemų pavyzdžių. Taigi, *sistemų, kuriose* kokio nors materialaus taško *pagreitis vienodas, yra kiek norima daug*. Tuomet sakoma, kad pagreitis yra invariantinis dydis arba **invariantas.** t.y. nesikeičia įvairiose koordinačių sistemose.

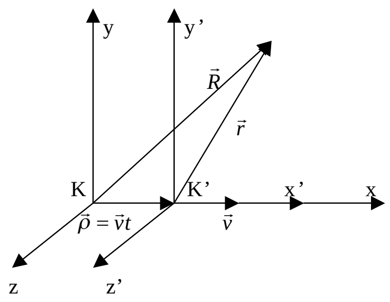
Kai sistema K‘ juda tiesia linija ir pastoviu greičiu, vektorių $\vec{\rho}$ galima rasti bet kuriuo laiko momentu, remiantis 2.4 paragrafo (19):

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}.$$

Vietoj $\vec{r}$ čia reikia rašyti $\vec{\rho}$, vietoj $\vec{r}_0$ - $\vec{\rho}_0$, vietoj $\vec{a}$ - rašyti $\vec{a}_n = 0$ ir vietoj $\vec{v}_0 - \vec{v}_n$, kurį toliau žymėsime tiesiog $\vec{v}$. Tegul, be to, $\vec{\rho}_0$=0, t.y. abiejų sistemų pradžios taškai K ir K‘ pradiniu laiko momentu t_0=0 sutapo. Tuomet $\vec{\rho} = \vec{v} \cdot t$, įrašę tą reikšmę į (1) gauname:

$$\vec{R} = \vec{r} + \vec{v}t. \qquad (7)$$

Dar kartą prisiminkime, kad $\vec{v}$ čia yra judančios sistemos greitis.



57 pav.

Tegul abiejų sistemų koordinačių ašys x ir x’, y ir y’, z ir z’ atitinkamai yra lygiagrečios, o greitis $\vec{v}$ nukreiptas x – o ašies kryptimi. Tuomet x ir x’ ašys turi būti vienoje tiesėje (57 pav.), nes priešingu atveju $\vec{\rho}_0$ nebūtų lygus nuliui. Projekcijos:

$$v_x = v, v_y = v_z = 0,$$

$$r_x = x', r_y = y', r_z = z',$$

$$R_x = x, R_y = y, R_z = z.$$

Todėl remiantis (7) ir tuo, kad atstojamojo vektoriaus projekcija į kurią nors ašį yra lygi atskirų vektorių projekcijų sumai (žr. 1.3 paragrafą), gauname:

$$\left.\begin{aligned} x &= x' + vt, \\ y &= y', \\ z &= z'. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Prisiminkime, kad x, y, z čia yra judančio taško M koordinatės sistemoje K, o x‘, y‘, z‘ – to paties taško koordinatės sistemoje K‘. Laikas t abiejose sistemose laikomas vienodu, todėl prie (8) dar reikėtų prirašyti t=t‘. (8) vadinasi **Galilėjaus koordinačių transformacija.**

Kadangi ir Galilėjaus greičių transformaciją (3), ir koordinačių transformaciją (8) gavome, remdamiesi (1), tai galime daryti išvadą, kad tarp tų dviejų transformacijų yra glaudus ryšys. Jeigu pasirodytų, kad kokiam nors greičiui negalioja Galilėjaus greičių transformacija, tai nustotų galioti ir Galilėjaus koordinačių transformacija. Tuomet reikėtų ieškoti naujų transformacijų. Taip atsitiko XIX a. antroje pusėje, nagrinėjant šviesos savybes.

Pratybos

Kinematikos uždavinių sprendimas įvairiose atskaitos sistemose

1. Galima spręsti dar neišspręstus fizikos vadovėlio atitinkamus uždavinius.
2. Du keliai kertasi statmenai. Vienu keliu link sankryžos važiuoja automobilis pastoviu greičiu v_1, o kitu keliu – automobilis pastoviu greičiu v_2>v_1. Tam tikru laiko momentu abu automobiliai buvo l atstume nuo sankryžos. Raskite mažiausią atstumą l_1 tarp automobilių. (Ats.: $l_1 = l\dfrac{v_2 - v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$).
3. Plaukikas plaukia Nerimi prieš srovę. Vilniuje ties Žaliuoju tiltu jis pametė tuščią gertuvę. Dar 20 minučių jis plaukė prieš srovę, paskui pastebėjo, kad pametė gertuvę, ir, pasukęs atgal, ėmė ją vytis. Pasivijo ties Žvėryno tiltu. Raskite Neries tėkmės greitį, žinodami, kad atstumas tarp tiltų yra 2km. (Ats.: 3 km/h).

4. Lėktuvas skrenda į pietus 540km/h greičiu oro atžvilgiu per oro srautą, kuris 250km/h greičiu juda į rytus. Kokia lėktuvo judėjimo kryptis Žemės atžvilgiu? Kokį kelią virš Žemės lėktuvas nuskris per 15 min? (Ats.: $\angle 24^0 51'$ į rytus nuo meridiano, 149 km).
5. 300km/h greičiu oro atžvilgiu skrendančio lėktuvo lakūnas turi patekti į miestą, esantį už 600km į šiaurę. Iš vakarų pučia vėjas 40km/h greičiu. Kokiu kursu turi skristi lėktuvas? Kiek laiko užtruks šis reisas? (Ats.: $\angle 7^0 40'$ į vakarus nuo meridiano, 2 val ir 1 min).
6. Garlaivis plaukia tiesiai į pietus 25km/h greičiu. Iš pietvakarių pučiančio vėjo greitis yra lygus 18km/h. Kokį kampą su šiaurės kryptimi sudarys iš kamino rūkstantys dūmai? (Ats.: $\angle 18^0 38'$ į rytus nuo meridiano).
7. Lėktuvas, skrendantis į šiaurę 320km/h greičiu, yra beveik tiksliai po kitu lėktuvu, kuris skrenda į rytus 260km/h greičiu.
a) Kokia yra antrojo lėktuvo poslinkio pirmojo lėktuvo atžvilgiu horizontali komponentė, praėjus 20 min po jų susitikimo? b) Kokia yra į rytus skrendančio lėktuvo greičio horizontali komponentė į šiaurę skrendančio lėktuvo atžvilgiu? c) Ar keičiasi šio greičio kryptis Žemės atžvilgiu? (Ats.: a) 137km $39^0 05'$ kampu į rytus nuo pietų krypties, b) 412km/h ta pačia kryptimi, c) nesikeičia.).
8. Lakūnas, žymėdamas kursą į susitikimo su lėktuvnešiu vietą, nustatė, kad kurso žymėjimo momentu lėktuvas buvo už 600 jūrmylių pietų kryptimi nuo lėktuvnešio. Lėktuvnešis plaukia 15^0 kursu į rytus nuo meridiano 25 jūrmylių per valandą greičiu. Skridimo aukštyje vėjo kryptis 70^0 į vakarus nuo meridiano. Vėjo greitis – 40 jūrmylių per valandą. Kokia turi būti lėktuvo kryptis ir greitis oro atžvilgiu, kad jis susitiktų su lėktuvnešiu po dviejų valandų? (Ats.: kai 15^0 ir 70^0 yra nuo šiaurės krypties, gauname lėktuvo kryptį $8^0 05'$ į rytus nuo šiaurės krypties ir greitis 313,5 jūrmylių per valandą).
9. Motorinė valtis, kurios greitis vandens atžvilgiu lygus v, plaukia upe. Upės tėkmės greitis lygus u(u<v). Kaip greičiau laivui pasiekti priešingą krantą taške, esančiame kaip tik priešais prieplauką: ar plaukiant visą laiką tokia kryptimi, kad atstojamasis greitis būtų nukreiptas statmenai į upės tėkmę, ar plaukiant tiesiog į priešingą krantą, nekreipiant dėmesio į srovę, o po to priešinga pakrante prieš vandenį iki reikiamo taško? Srovės greitį visame upės plotyje laikykite vienodu. (Ats.: $\frac{t_1}{t_2} = \sqrt{\frac{v-u}{v+u}} < 1,$ todėl pirmuoju atveju laikas t_1 yra mažesnis už laiką t_2 antruoju atveju).
10. Šturmanas stengiasi pravesti laivą rūke per siaurą praėjimą tarp uolų. Jis žino, kad praėjimas yra šiaurės rytuose. Laivas gali judėti vandens atžvilgiu greičiu v, o okeano srovė neša laivą į rytus greičiu v $\sqrt{2}$. Kokia kryptimi šturmanas turi vesti laivą? (Ats.: į šiaurės vakarus).

3.2 Šviesos greitis

Galilėjaus koordinačių transformacijoje 3.1 paragrafo (8) v reiškia nešimo greitį. Taip pat raide v pažymėkime nešimo greitį v_n ir Galilėjaus greičių transformacijoje $v_a=v_r+v_n$ (3.1 paragrafo (4)). Be to, reliatyvųjį greitį v_r pažymėkime w. Tuomet Galilėjaus greičių transformaciją užrašysime:

$$w = u + v. \qquad (1)$$

Nagrinėjant mechaninių judėjimų greičius, ta formulė puikiai atitiko eksperimentinius duomenis. Tačiau XIX a., pradėjus tiksliai matuoti šviesos greitį, pasirodė, kad jis nebepatenkina (1) ryšio. Matuojant šviesos greitį, daug pasidarbavo prancūzų fizikas Fizo. 1851m. Jis matavo šviesos greitį judančiame vandenyje. Šviesos greitį stovinčiame vandenyje pažymėkime u. Tai reliatyvusis greitis (1). Vandens greitį pažymėkime v. Tai nešimo greitis. Šviesos greitį judančiame vandenyje pažymėkime w. Tai absoliutinis greitis. Tegul šviesa plinta ta pačia kryptimi, kuria teka vanduo. Iš bandymų buvo nustatyta, kad

$$w = u + kv, \qquad (2)$$

kur k<1. Vadinasi, šviesos greitis tikrai nepatenkina Galilėjaus greičių transformacijos. Tai patvirtino ir vėlesni labai kruopštūs eksperimentai, kuriuos atliko amerikietis Albertas Mičelsonas (literatūroje jis neteisingai vadinamas Maikelsonu. Jis pats save vadino Mičelsonu) ir kt. O tuomet, kaip jau esame minėję, nebegalioja ir Galilėjaus koordinačių transformacijos. Buvo gautos naujos koordinačių transformacijos. Jos vadinasi olandų fiziko Henriko Antono Lorenco vardu. Parašysime Lorenco transformacijas be įrodymo:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x'+vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\ y = y' \\ z &= z',\ t = \frac{t'+\frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Šiose formulėse c yra šviesos greitis vakuume, c=2,998·10^8m/s arba apytikriai 3·10^5 km/s. Tai nors ir labai didelis greitis, palyginus su įprastais mechaniniais greičiais. Tačiau vis dėlto nėra be galo didelis greitis. Didelius atstumus ir šviesa nueina tik per nemažą laiko tarpą. Jeigu nueiti nuo Žemės iki Mėnulio ir grįžti atgal šviesai tereikia nepilnų 3 sekundžių, tai nuo Saulės iki Žemės – jau maždaug 8 minučių, o nuo artimiausios žvaigždės iki Žemės šviesa eina daugiau kaip trejus metus. Nuo tolimųjų dangaus šviesulių iki Žemės šviesa eina daugelį tūkstančių metų. Taigi, jeigu kuri nors žvaigždė staiga užgestų, tai mes ir mūsų ainiai ją dar matytų šviečiant. Todėl galima sakyti, kad kai naktį žvelgiame į žvaigždėtą dangų, tai matome ne tą žvaigždžių išsidėstymą, kuris yra tuo momentu, o tą, kuris buvo labai gilioje senovėje.

Bet grįžkime prie Lorenco transformacijų. Iš jų matome, kad *laikas, pereinant iš vienos atskaitos sistemos į kitą, taip pat* ***kinta.*** T.y. laikas, kaip ir kūno padėtis (koordinatės) arba greitis, yra santykinis arba reliatyvus dydis. Vėliau dar kalbėsime, kad ir kūno masė turi santykinį charakterį – priklauso nuo greičio. Šios ir kitos svarbios išvados, kurių čia nenagrinėsime, priklauso **reliatyvumo teorijai.** Reliatyvumo teorijos pagrindus paskelbė 1905m. vienas žymiausių XX a. mokslininkų – vokiečių fizikas Albertas Einšteinas.

Kai judančios sistemos greitis v<<c, nesunku matyti, kad Lorenco transformacijos (3) pereina į Galilėjaus koordinačių transformacijas 3.1 paragrafo (8). Taigi, kai greičiai yra labai maži, palyginus su šviesos greičiu vakuume, gerai tinka Galilėjaus koordinačių transformacijos.

Tegul materialus taškas M sistemoje K‘ juda pastoviu greičiu $\bar{u}$. Tegul tas greitis yra nukreiptas į tą pusę, kur ir nešimo greitis $\bar{v}$ (58 pav.). Kadangi $\bar{v}$ irgi yra pastovus, tai atstojamasis (absoliutinis) greitis $\bar{w}$ taip pat bus pastovus. Tąsyk greičio didumas bus lygus atitinkamai koordinatei, padalytai iš laiko. Be to, tegul pradiniu momentu t_0=0, pradinės koordinatės x_0 ir x_0’=0. Tuomet:

$$w = \frac{x}{t},\ u = \frac{x'}{t'}. \qquad (4)$$

Pastarojoje lygybėje rašome ne t, o t‘ , nes pagal Lorenco transformacijas $t' \neq t$. Į (4) įrašome x ir t išraiškas iš (3):

$$w = \frac{x'+vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{t'+\frac{v}{c^2}x'} = \frac{x'+vt'}{t'+\frac{v}{c^2}x'} = \frac{\frac{x'}{t'}+v}{1+\frac{v}{c^2}\cdot\frac{x'}{t'}}.$$

Atsižvelgę į (4) antrąją lygybę, gauname:

$$w = \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}}. \qquad (5)$$

Gautoji formulė vadinasi **reliatyvistiniu greičių sudėties dėsniu.** Tai viena reliatyvumo teorijos išvadų. Ja galima gerai paaiškinti aukščiau minėtą Fizo eksperimento rezultatą (2), pagal kurį $w < u + v$. Tas pats matyti ir iš (5). Todėl galima teigti, kad reliatyvistinis greičių sudėties dėsnis (5) eksperimentiškai yra patvirtintas.

Tegul u=c – judančioje sistemoje plinta šviesa. Pagal (5) rasime atstojamąjį tos šviesos greitį w. Gauname:

$$w = \frac{c+v}{1+\frac{cv}{c^2}} = c.$$

Gavome, kad atstojamasis arba absoliutinis šviesos greitis vakuume yra lygus reliatyviajam greičiui. Keisdami greičio v didumą, gausime vis kitas judančias sistemas ir vis tą patį atsakymą w=c. Tas pats bus ir tada, kai u≠c, bet v=c. Net kai ir u ir v=c, w=c. Apibendrinant tai, o taip pat remiantis įvairiais eksperimentiniais stebėjimais, galima sakyti, kad šviesos greitis vakuume visose atskaitos sistemose yra vienodas. Jis nepriklauso nuo šviesos šaltinio judėjimo. Tai pats didžiausias gamtoje žinomas greitis. Nors elementariosios dalelės šiuolaikiniuose greitintuvuose labai įgreitinamos, tačiau jų greičiai niekada neviršija c, o tik daugiau ar mažiau priartėja prie jo. Reliatyvumo teorijoje parodoma, kad greičiu c negali judėti tos dalelės, kurios turi ramybės masę.

Kai u *ir* $v << c$, ir iš (5) seka, kad $w \approx u + v$. Taigi, kai greičiai maži, palyginus su šviesos greičiu vakuume, reliatyvistinis greičių sudėties dėsnis pereina į klasikinį greičių sudėties dėsnį. Tokią pat išvadą gavome ir apie koordinačių transformacijas. Todėl apibendrindami galime sakyti, kad *klasikinė kinematika galioja tik tada, kai kūnų greičiai yra daug mažesni už c.* Tačiau visų kasdienybėje žmogų supančių daiktų greičiai, o taip pat visų dangaus kūnų ir kosminių laivų greičiai ir yra tokie. Todėl klasikinė kinematika lieka naudinga ir reikalinga ir dabar. Mažais greičiais paprastai juda santykinai dideli, žmogaus akimi matomi kūnai. Tokie kūnai vadinami **makrokūnais.** Dalelės, iš kurių sudaryti atomai, o taip pat visos kitos elementariosios dalelės vadinamos **mikrokūnais.** Jiems galima priskirti ir šviesą, turint galvoje, kad į ją galima žiūrėti, kaip į fotonų srautą. Todėl galima sakyti ir taip: **klasikinė kinematika tinka makrokūnų judėjimui nagrinėti ir netinka mikropasaulyje.** Mikropasaulyje dalelės ne tiktai gali judėti greičiais. Artimais šviesos greičiui c, bet dar ir pasireiškia kiti saviti dėsniai – kvantinės savybės. Jas nagrinėja **kvantų teorija,** kurios pradmenys buvo paskelbti 1900m – prieš 100 metų.

Pratybos

1. Iš (3) gaukite atvirkštines Lorenco transformacijas, t.y. x' ir t' išreikškite per x ir t (Ats.: $x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$).
2. Apskaičiuokite, kiek kartų garso, kulkos I, II, III kosminiai greičiai, Žemės greitis, judant aplink Saulę, yra mažesni už šviesos greitį vakuume c.
3. Elektronas, greitintuve judėdamas greičiu v=c/2, susitinka kitą elektroną, judantį tokiu pačiu greičiu. Kokiu greičiu kinta atstumas tarp jų? Palyginkite, kaip skirsi gautas rezultatas nuo to, ką gautumėte pagal klasikinį greičių sudėties dėsnį. (Ats.: $w = 0{,}8c,\ w_{klasik} = c$).

3.3 Sudėtinis kietojo kūno judėjimas

3.1 paragrafe nagrinėjome taško sudėtinį judėjimą. Jeigu kūnas nedidelis, tai pirmu artėjimu sudėtinį kūno judėjimą galima nagrinėti kaip taško sudėtinį judėjimą. Jeigu kūno matmenys pakankamai dideli (lyginant juos su kitais matmenimis nagrinėjamame uždavinyje), tai tenka

atsižvelgti į atskirų kūno taškų trajektorijų, greičių ir pagreičių skirtumus ir tuomet turime nagrinėti kūno sudėtinį judėjimą. Pavyzdžiui, norint tiksliai žinoti pradinį dirbtinio Žemės palydovo greitį, startuojant įvairiose geografinėse platumose, reikia atsižvelgti į Žemės paviršiaus taškų greitį toje vietoje. Jeigu, nagrinėjant sudėtinį judėjimą, galime surasti kūno vieno taško greitį ir pagreitį, tai kitų taškų greičių ir pagreičių suradimui užtenka mokėti surasti kūno sudėtinio judėjimo kampinį greitį ir pagreitį.

Toliau ir nagrinėsime šį klausimą. Kaip ir 3.1 paragrafe, pasirinksime dvi koordinačių sistemas: K ir K‘. Nagrinėjamas kūnas juda sistemos K‘ atžvilgiu, o ji savo ruožtu juda kitos sistemos K atžvilgiu, kurią sąlyginai laikysime nejudančia. Kaip ir 3.1 paragrafe, atskiriems judėjimams vartosime tuos pačius pavadinimus: kūno judėjimą judančios sistemos K‘ atžvilgiu vadinsime reliatyviuoju judėjimu, to paties kūno judėjimą sistemos K atžvilgiu – absoliutiniu judėjimu, o judančios sistemos K‘ judėjimą nejudančios sistemos K atžvilgiu – nešamuoju judėjimu.

Kūno kampinį greitį atžvilgiu judančios sistemos K‘ vadinsime reliatyviuoju kampiniu greičiu $\vec{\omega}_r$. Nešimo kampiniu greičiu $\vec{\omega}_n$ vadinsime judančios sistemos K‘ sukimosi atžvilgiu sistemos K kampinį greitį ir absoliutiniu kampiniu greičiu $\vec{\omega}_a$ vadinsime kūno kampinį greitį atžvilgiu nejudančios sistemos K.

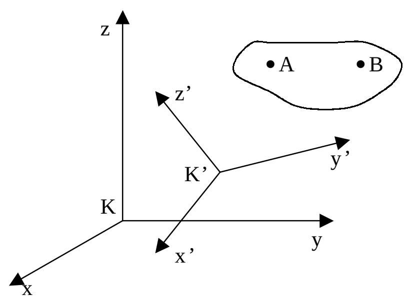
Jeigu judančios sistemos koordinačių sistema K‘ juda tik slenkamai, tai ji neturės įtakos kūno sukimuisi ir todėl absoliutinis kampinis greitis $\vec{\omega}_a$ bus lygus reliatyviajam kampiniam greičiui $\vec{\omega}_r$.

Bendru atveju judančioji koordinačių sistema K‘ gali ne tik slinkti, bet ir suktis. Tokio sudėtinio kūno judėjimo atveju absoliutinis kampinis greitis yra lygus reliatyviojo ir nešimo kampinių greičių sumai:

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_n.$$

Įrodykime tos lygybės teisingumą.

Pasirinkime kūne du taškus: A ir B (59 pav.). Jeigu nagrinėsime jų judėjimą pradžioje sistemos K, o po to sistemos K‘ atžvilgiu, tai pagal 2.9 paragrafo (2) Eulerio formulę galėsime užrašyti ryšį tarp tų taškų greičių:



59 pav.

$$\left.\begin{aligned} \vec{v}_B^a &= \vec{v}_A^a + [\vec{\omega}_a \cdot \overrightarrow{AB}] \\ \vec{v}_B^r &= \vec{v}_A^r + [\vec{\omega}_r \cdot \overrightarrow{AB}] \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

kur indeksai a ir r žymi absoliutinį ir reliatyvųjį linijinį ir kampinį greičius. Jeigu paimsime du judančius sistemos K‘ taškus, tuo momentu sutampančius su taškais A ir B, tai pagal tą pačią Eulerio formulę ir nešimo greičio apibrėžimą 3.1 paragrafe galėsime užrašyti:

$$\vec{v}_B^n = \vec{v}_A^n + [\vec{\omega}_n \cdot \overrightarrow{AB}]. \qquad (2)$$

Pagal taško sudėtinio judėjimo greičių sudėties formulę galime rašyti:

$$\begin{aligned} \vec{v}_B^a &= \vec{v}_B^r + \vec{v}_B^n, \\ \vec{v}_A^a &= \vec{v}_A^r + \vec{v}_A^n. \end{aligned} \qquad (3)$$

Iš (1) pirmos eilutės:

$$[\vec{\omega}_a \cdot \overrightarrow{AB}] = \vec{v}_B^a - \vec{v}_A^a;$$

čia įrašome (3):

$$[\vec{\omega}_a \cdot \overrightarrow{AB}] = \vec{v}_B^r + \vec{v}_B^n - (\vec{v}_A^r + \vec{v}_A^n) = (\vec{v}_B^r - \vec{v}_A^r) + (\vec{v}_B^n - \vec{v}_A^n).$$

Pagal (1) antrąją eilutę ir (2):

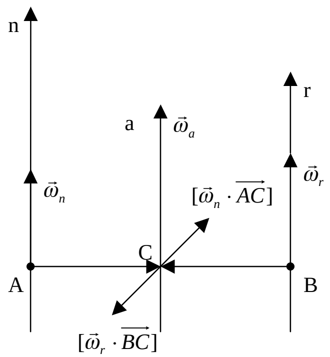
$$[\vec{\omega}_a \cdot \overrightarrow{AB}] = [\vec{\omega}_r \cdot \overrightarrow{AB}] + [\vec{\omega}_n \cdot \overrightarrow{AB}].$$

Kadangi vektorius $\overrightarrow{AB}$ yra pasirinktas laisvai, tai

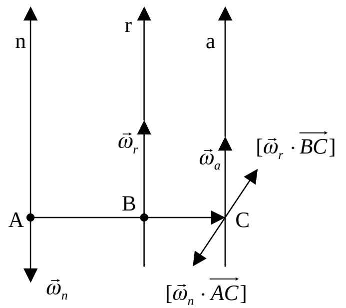
$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_n. \tag{4}$$

Paskutinę formulę galima apibendrinti bet kokiam judančių sistemų skaičiui:

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + ... + \vec{\omega}_n. \tag{5}$$



60 pav.



61 pav.

Dešinėje lygybės pusėje yra atskirų koordinačių sistemų nešimų ir reliatyvusis kampinis greičiai. Pavyzdžiui, kūnas sukasi reliatyviuoju kampiniu greičiu $\vec{\omega}_1$, būdamas ant platformos, kuri sukasi įtaisyta ant antros platformos kampiniu greičiu $\vec{\omega}_2$ jos atžvilgiu, o pastaroji sukasi kampiniu greičiu $\vec{\omega}_3$ Žemės atžvilgiu.

Kampinio greičio vektoriai sudedami pagal vektorių sudėties taisykles. Tačiau dar reikalinga surasti suminio vektoriaus pridėjimo vietą, t.y. suminio sukimosi ašies vietą. Panagrinėkime kai kuriuos kampinių greičių sudėties atvejus.

1. Kampiniai greičiai $\vec{\omega}_r$ ir $\vec{\omega}_n$ yra vienodos krypties (60 pav.). Tarp sukimosi ašių r ir n išveskime bendrą statmenį AB ir ant jo pasirinkime tašką C taip, kad būtų patenkintas sąryšis:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{\omega_r}{\omega_n}. \tag{6}$$

Nesunku pastebėti, kad taško C absoliutinis greitis bus lygus nuliui. Iš tikrųjų, $\vec{v}_C^{\,a} = \vec{v}_C^{\,r} + \vec{v}_C^{\,n}$. Bet pagal 2.7 paragrafą

$$\vec{v}_C^{\,r} = [\vec{\omega}_r \cdot \overrightarrow{BC}];\ \vec{v}_C^{\,n} = [\vec{\omega}_n \cdot \overrightarrow{AC}]$$

ir todėl

$$\vec{v}_C^{\,a} = [\vec{\omega}_r \cdot \overrightarrow{BC}] + [\vec{\omega}_n \cdot \overrightarrow{AC}],$$

$$v_C^a = \omega_r \cdot BC - \omega_n \cdot AC.$$

Mat, dešiniosios lygybės pusės abi vektorinės sandaugos yra priešingų krypčių. Atsižvelgus dar į (6), gauname v_C^a=0 ir

$$\vec{v}_C^{\,a} = 0.$$

Jeigu per tašką C išvesime ašį a, lygiagretę ašims r ir n, tai visų jos taškų absoliutiniai greičiai bus lygūs nuliui, kadangi AB mes pasirinkome laisvai. Pagal kampinių greičių sudėties teoremą (4) ir $\vec{\omega}_a$ bus lygiagretus ašiai a. Taigi, galime daryti išvadą, kad kūne kiekvienu momentu

egzistuoja ašis, kurios visų taškų greičiai lygūs nuliui. Vadinasi, sudėtinis kūno judėjimas yra momentinis sukimasis apie ašį, kuri yra lygiagretė sudedamųjų judėjimų ašim, guli tarp jų vienoje plokštumoje ir nutolusi nuo jų atstumais atvirkščiai proporcingais kampiniams greičiams.

2. Kampiniai greičiai $\vec{\omega}_r$ ir $\vec{\omega}_n$ yra priešingų krypčių ir nevienodo didumo (61 pav.). Šis atvejis yra visiškai analogiškas pirmajam. Bet kurioje vietoje vėl išveskime tiesę AB, statmeną sukimosi ašims r ir n. Ant jos pasirinkime tašką C taip, kad

$$\frac{AC}{CB} = \frac{\omega_r}{\omega_n}.$$

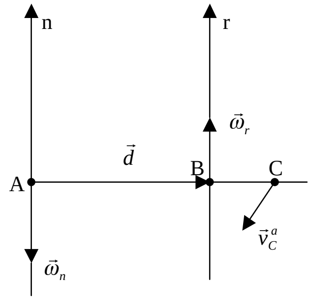
Nesunku įrodyti, kad taško C greitis lygus nuliui, nes

$$[\vec{\omega}_r \cdot \overrightarrow{BC}] = -[\vec{\omega}_n \cdot \overrightarrow{AC}],\ o$$

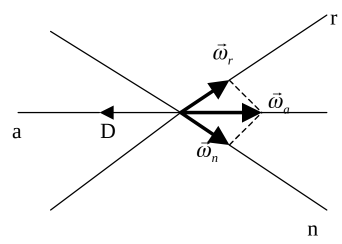
$$\vec{v}_C^{\,a} = \vec{v}_C^{\,r} + \vec{v}_C^{\,n} = [[\vec{\omega}_r \cdot \overrightarrow{BC}] + [\vec{\omega}_n \cdot \overrightarrow{AC}] = 0.$$

Ašis, pervesta per tašką C lygiagrečiai ašims r ir n, bus taip pat momentinio sukimosi ašimi. Siūlome patiems, panašiai kaip ir 1 atveju, suformuluoti išvadą apie momentinės sukimosi ašies padėtį ir absoliutinio kampinio greičio $\vec{\omega}_a$ kryptį.

3. Kampiniai greičiai $\vec{\omega}_r$ ir $\vec{\omega}_n$ yra priešingų krypčių ir vienodų didumų (sukimosi dvejetas) (62 pav.).



62 pav.



63 pav.

Šiuo atveju absoliutinis kampinis greitis:

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_n = 0\,.$$

Todėl (žr. 2.7 paragrafą) toks absoliutinis judėjimas yra slenkamasis. Rasime to judėjimo greitį. Braižome panašiai kaip ir praeitu atveju (62 pav.).

$$\vec{\omega}_r = -\vec{\omega}_n; \omega_n = \omega_r = \omega;$$

$$\vec{v}_C^{\,r} = [\vec{\omega}_r \cdot \overrightarrow{BC}] = -[\vec{\omega}_n \cdot \overrightarrow{BC}],$$

$$\vec{v}_C^{\,n} = [\vec{\omega}_n \cdot \overrightarrow{AC}],$$

$$\vec{v}_C^{\,a} = \vec{v}_C^{\,r} + \vec{v}_C^{\,n} = [\vec{\omega}_n(-\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC})] = [[\vec{\omega}_n \cdot \overrightarrow{AB}] = [\vec{\omega}_n \cdot \vec{d}] = -[\vec{\omega}_r \cdot \vec{d}]. \tag{7}$$

$$v_C^a = \omega d. \tag{8}$$

Atstumas tarp kampinių greičių (tarp sukimųsi ašių) d vadinamas dvejeto petimi, o sandauga ω d, panašiai į jėgos momentą, - dvejeto momentu. Taigi, sukimųsi dvejetas yra ekvivalentiškas slenkamajam judėjimui, kurio greitis lygus dvejeto momentui. Tas greitis $\vec{v}_C^{\,a}$ statmenas į dvejeto plokštumą ir nukreiptas į tą pusę, iš kurios žiūrint atrodo lyg kampiniai greičiai $\vec{\omega}_r$ ir $\vec{\omega}_n$ suktų dvejeto plokštumą apie jai statmeną ašį prieš laikrodžio rodyklę.

Dvejeto plokštuma, laikui bėgant, keičia savo orientaciją erdvėje, todėl absoliutinio slenkamojo judėjimo greitis $\vec{v}_C^a$ irgi keičia savo kryptį.

Teisingas ir atvirkščias teiginys: bet koks slenkamasis judėjimas greičiu $\vec{v}_C^a$ gali būti atvaizduotas sukimųsi dvejetu, kurio plokštuma yra statmena vektoriui $\vec{v}$. Sukimųsi dvejeto pavyzdys yra dviračio pedalo judėjimas. Panagrinėkime jį.

4. Kampinių greičių $\vec{\omega}_r$ ir $\vec{\omega}_n$ linijos susikerta, t.y. reliatyvusis ir nešimo sukimasis vyksta apie susikertančias ašis. Suraskime absoliutinio judėjimo kampinį greitį $\vec{\omega}_a$. Taškas O, kuriame kertasi ašys r ir n yra nejudantis, kadangi pagal greičių sudėties teoremą jo absoliutinis greitis

$$\vec{v}_O^a = \vec{v}_O^r + \vec{v}_O^n = 0 \text{ (Abu dėmenys lygūs nuliui)}$$

Absoliutinis kampinis greitis $\vec{\omega}_a$ pagal kampinių greičių sudėties teoremą (4) yra lygiagretainio įstrižainė (63 pav.). Išilgai vektoriaus $\vec{\omega}_a$ išvesta ašis a yra momentinė sukimosi ašis. Iš tikrųjų pagal 2.9 paragrafo (2), bet kurio tos ašies taško D greitis:

$$\vec{v}_D^a = \vec{v}_O^a + [\vec{\omega}_a \cdot \overrightarrow{OD}] = 0,$$

nes $\overrightarrow{OD} \parallel \vec{\omega}_a$.

Laikui bėgant ašis a keičia savo kryptį, nes reliatyviojo sukimosi ašis r sukasi apie nešamojo sukimosi ašį n. Tačiau tų ašių susikirtimo taškas O, kaip matėme, nejuda. Taigi, kietojo kūno absoliutinis judėjimas šiuo atveju yra sukimasis apie nejudamą tašką. Kūno bet kurio taško greičiui ir pagreičiui ieškoti tinka 2.8 paragrafo (1) ir (6) (Rivalso teorema).

5. Kampinių greičių $\vec{\omega}_r$ ir $\vec{\omega}_n$ linijos prasilenkia (nesusikerta). Tada absoliutinis kietojo kūno judėjimas yra bet koks (žr. 2.8 paragrafą). Kūno taškė greičiui tiks to skirsnio (7) formulė. Tokį judėjimą visada galima išreikšti momentiniu sraigtiniu judėjimu.

3.4 Koriolio pagreitis

Skirsnyje (3.1), nagrinėjant taško sudėtinį judėjimą buvo apsiribota atveju, kai judančioji koordinačių sistema K' juda slenkamai, t.y. koordinačių ašys nekeičia krypties. Ir gautoji ten pagreičių sudėties formulė tinka tiktai tada, kai galioja minėta prielaida. Dabar panagrinėsime atvejį, kai koordinačių sistema K' juda bet kaip, t.y. slenka ir sukasi. Tokiu atveju absoliutinis pagreitis $\vec{a}_a$ yra lygus reliatyviojo $\vec{a}_r$, nešimo $\vec{a}_n$ ir Koriolio pagreičio $\vec{a}_k$ vektorių sumai:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_n + \vec{a}_k. \qquad (1)$$

Koriolio pagreitis

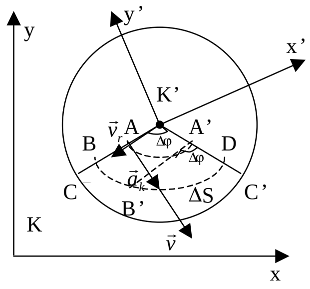
$$\vec{a}_k = 2[\vec{\omega} \cdot \vec{v}_r], \qquad (2)$$

kur $\vec{\omega}$ yra koordinačių sistemos K' sukimosi kampinis greitis, o $\vec{v}_r$ taško reliatyvusis greitis sudėtiniame judėjime.

(1) lygybė įrodoma teorinėje mechanikoje, remiantis aukštąja matematika. Mes jos visos neįrodinėsime, o tiktai parodysime, kaip rasti Koriolio pagreičio išraišką (2).

Tegul sistema K' sukasi kampiniu greičiu $\vec{\omega}$. Visada judančios sistemos ašis galima taip parinkti, kad sukimosi ašis sutaptų su z' ašimi. Tegul mūsų nagrinėjamas nedidelis kūnas iš taško A juda išilgai spindulio K'C reliatyviuoju greičiu $\vec{v}_r$ atžvilgiu sistemos K'. Per mažą laiką Δt jis nueis atkarpą Ab=Δl=v_rΔt. Per tą laiką spindulys K'C pasisuks kampu Δφ=ω Δt ir judąs kūnas pasislinks iš A į D. Nejudamoje koordinačių sistemoje kūnas tuo pat metu dalyvauja dviejuose judesiuose: judesyje sistemos K' atžvilgiu greičiu $\vec{v}_r$ ir judesyje kartu su besisukančia sistema K'. Spindulio K'C taškų linijiniai greičiai, atsirandantys dėl sistemos K' sukimosi, yra skirtingi. Taške A tą linijinį greitį pažymėkime $\vec{v}$. Judėdamas tik sukimosi greičiu $\vec{v}$, kūnas nubrėžtų

lanką A A' ir ateitų į tašką A'. Judėdamas tuo pat metu taške A turėtu greičiu $\vec{v}$ ir greičiu $\vec{v}_r$, kūnas patektų į tašką B' (A' B'∥AB). Iš tikrųjų (jau sakėme) kūnas nueina į tašką D. Taip atsitinka dėl to, kad greitis $\vec{v}$, kai kūnas tolsta nuo sukimosi centro, didėja. Taigi, mūsų kūnas nejudamos sistemos atžvilgiu keičia greitį, t.y. juda su pagreičiu. Pagreičio didumą galime nustatyti iš papildomo kelio ΔS= B'D, kurį kūnas nuėjo per laiką Δt. Iš 64 pav. turime (kai Δφ mažas, A' B'≈ A' D):



64 pav.

$$\Delta S = A' B' \cdot \Delta\varphi$$

arba, kadangi

$$A' B' = AB = \Delta l = v_r \Delta t$$

Ir

$$\Delta\varphi = \omega\, \Delta t,$$

tai

$$\Delta S = \omega\, v_r (\Delta t)^2.$$

Šioje formulėje kelio priklausomybė nuo laiko yra tokia kaip ir tolygiai kintamojo judėjimo atveju: $\Delta S = a(\Delta t)^2/2$, kur a yra pagreitis. Todėl sulyginę šias dvi išraiškas, gausime:

$$a = 2\omega\, v_r = a_k.$$

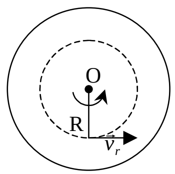
Tai yra (2) formulės vektoriaus didumas, nes mūsų atveju $\vec{v}_r \perp \vec{\omega}$. Pagreičio $\vec{a}_k$ kryptis sutampa su greičio $\vec{v}$ kryptimi, nes mūsų atveju tas greitis didėja. Todėl $\vec{a}_k$ statmenas su santykiniu greičiu $\vec{v}_r$. Kadangi $\vec{a}_k$ statmenas ir su kampiniu greičiu $\vec{\omega}$, tai pasinaudoję vektorinės sandaugos apibrėžimu matome, kad iš tikrųjų

$$\vec{a}_k = 2[\vec{\omega} \cdot \vec{v}_r].$$

Koriolis – prancūzų matematikas, gyveno 1795 – 1843 m.

Panagrinėkime Koriolio pagreitį kai kurias atskirais atvejais.

1. Kūnas (materialus taškas) juda besisukančioje koordinačių sistemoje apskritimu, kurio centras yra sukimosi ašyje, o apskritimo plokštuma statmena sukimosi ašiai (65 pav.). Kūnui judant reliatyviuoju greičiu $\vec{v}_r$, absoliutinis greitis yra lygus v_r+v, kur v=ω R taško A linijinis greitis dėl koordinačių sukimosi (nešimo greitis). Vadinasi, kūnas juda su įcentriniu pagreičiu



65 pav.

$$a_{ic} = \frac{(v_r + v)^2}{R} = \frac{v_r^2}{R} + \frac{v^2}{R} + \frac{2v_r v}{R}.$$

Narys v_r^2/R yra reliatyvusis (įcentrinis) pagreitis, narys v^2/R – nešimo (įcentrinis) pagreitis ir narys $2v_r v/R = 2v_r\omega = a_k$ – Koriolio (taip pat įcentrinis) pagreitis.

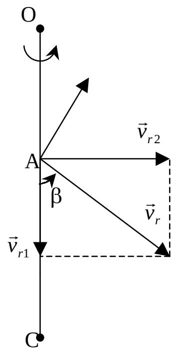
2. Taškas juda reliatyviuoju greičiu $\vec{v}_r$, kuris su spinduliu OC sudaro kampą β (sukimosi ašis eina per tašką O statmenai brėžinio plokštumai) (66 pav.). Greitį $\vec{v}_r$ išskaidome į komponentę $\vec{v}_{r1}$, nukreiptą išilgai spindulio ir į komponentę $\vec{v}_{r2}$, statmeną spinduliui. Komponentę $\vec{v}_{r1}$ atitiks Koriolio pagreitis

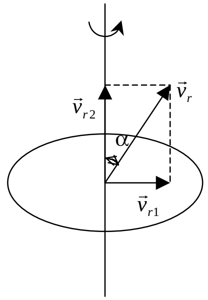
$$2v_{r1}\omega = 2v_r \cos\beta \cdot \omega,$$

nukreiptas taip pat kaip 64 pav. (tangentės kryptimi), o komponentę $\vec{v}_{r2}$ - Koriolio pagreitis

$$2v_{r2}\omega = 2v_r \sin\beta \cdot \omega,$$

nukreiptas taip pat kaip 65 pav. (į centrą).





67 pav.

66 pav.

Visas Koriolio pagreitis

$$a_k = \sqrt{(2v_r \cos\beta \cdot \omega)^2 + (2v_r \sin\beta \cdot \omega)^2} = 2v_r\omega.$$

3. Taškas juda kryptimi, kuri su sukimosi ašimi sudaro kampą α (sukimosi ašis guli brėžinio plokštumoje) (67 pav.). reliatyvųjį greitį $\vec{v}_r$ išskaidykime į dvi komponentes: statmeną sukimosi ašiai $\vec{v}_{r1}$ ir lygiagretę - $\vec{v}_{r2}$. Lygiagrečioji komponentė $\vec{v}_{r2}$ nekeičia kūno atstumo nuo sukimosi ašies ir negali sukelti jokių papildomų pagreičių. Todėl Koriolio pagreitį nusako tik statmenoji komponentė $v_{r1}=v_r \sin\alpha$ ir

$$a_k = 2v_r\omega\sin\alpha; \ \vec{a}_k = 2[\vec{\omega}\cdot\vec{v}_r],$$

kur $\vec{a}_k$ nukreiptas kaip 64 pav. – tangentės kryptmi.

Pratybos

1. Pagal (2) formulę nustatykite, kada Koriolio pagreitis yra didžiausias, kada lygus nuliui. Suredaguokite taisyklę $\vec{a}_k$ krypčiai nustatyti.
2. Nustatykite lėktuvo Koriolio pagreičio kryptį ir didumą, kai jis skrenda 1 km/s greičiu: a) išilgai pusiaujo iš rytų į vakarus, b) iš pietų į šiaurę, esant virš Vilniaus. Reikalingus skaitinius duomenis raskite patys.

Pagrindinė literatūra

1. J. Martišius, P. Urbonas. Fizikos fakultatyvinių užsiėmimų turinys IX klasėje. – Vilnius, 1971.
2. S. E. Frišas ir A. V. Timoreva. Bendrosios fizikos kursas: I tomas. – Vilnius, 1955.
3. О. В. Голубева. Теоретическая механика. – Москва, 1961.
4. Г. М. Финкелштейн. Курс теоретической механики. – Москва, 1959.

Turinys

Pastaba: ši informacija interneto svetainėje www.olimpas.lt skelbiama nuo 2004 05 25.