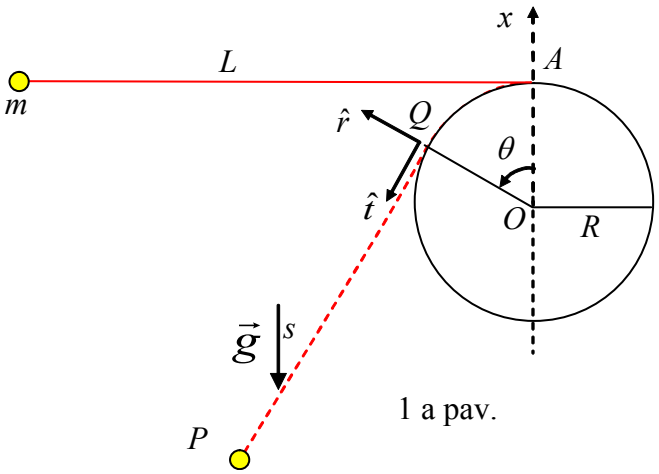
XXXIV TARPTAUTINĖ FIZIKOS OLIMPIADA
2003 m. rugpjūčio 2–11 d., Taipei, Taiwan

Teorinė Užduotis 1
Svyruoklė su krentančiu svareliu

Standus apvalus R spindulio strypas įtvirtintas horizontaliai virš žemės. Lengvu L ilgio ($L > 2\pi R$) siūlu m masės rutuliukas pakabintas taške A, kaip parodyta 1a pav. Svyruoklė pakeliama į A lygį ir paleidžiama laikant siūlą įtemptą. Siūlo išsitempimo nepaisome. Laikome, kad rutuliukas yra materialusis taškas ir svyruoja statmenoje strypo ašiai plokštumoje. Toliau rutuliukas vadinamas dalele. Laisvojo kritimo pagreitis $\vec{g}$.

Tegu O yra koordinačių sistemos pradžia. Kai dalelė yra taške P, siūlas liečia strypo paviršių taške Q. Atkarpos QP ilgis pažymėtas s. Vienetiniai liestinis ir normalės vektoriai taške Q atitinkamai $\hat{t}$ ir $\hat{r}$. Spindulio OQ padėtį nurodo kampas θ, kuris laikomas teigiamu matuojant nuo x ašies, nukreiptos išilgai OA prieš laikrodžio rodyklės kryptį. Kai $\theta = 0$ ilgis s yra lygus L, o dalelės potencinė energija U yra nulis. Dalelei judant momentinės θ ir s išvestinės laiku atitinkamai žymimos $\dot{\theta}$ ir $\dot{s}$. Kai nenurodoma kitaip visi greičiai pateikiami fiksuoto taško O atžvilgiu.



1 a pav.

A dalis

A dalyje laikoma, kad dalelei judant siūlas visą laiką įtemptas. Per pateiktus dydžius (t,y., s, $\theta, \dot{s}, \dot{\theta}$, R, L, g, $\hat{t}$ ir $\hat{r}$), išreikškite:

(a) [0.5 taško]. Sąryšį tarp $\dot{\theta}$ ir $\dot{s}$.

(b) [0.5 taško]. Greitį $\vec{v}_Q$ judančio taško Q atžvilgiu O.

(c) [0.7 taško]. Dalelės greitį $\vec{v}'$ judančio taško Q atžvilgiu jai esant taške P.

(d) [0.7 taško]. Dalelės greitį $\vec{v}$ taško O atžvilgiu jai esant taške P.

(e) [0.7 taško]. $\hat{t}$ komponentę dalelės *pagreičio* taško O atžvilgiu jai esant taške P.

(f) [0.5 taško]. Dalelės gravitacinę potencinę energiją jai esant taške P.

(g) [0.7 taško]. Dalelės greitį v_m žemiausiame jos trajektorijos taške.

B dalis

B dalyje imamas L ir R toks santykis:

$$\frac{L}{R} = \frac{9\pi}{8} + \frac{2}{3}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{16} = 3.534 + 3.352 = 6.886$$

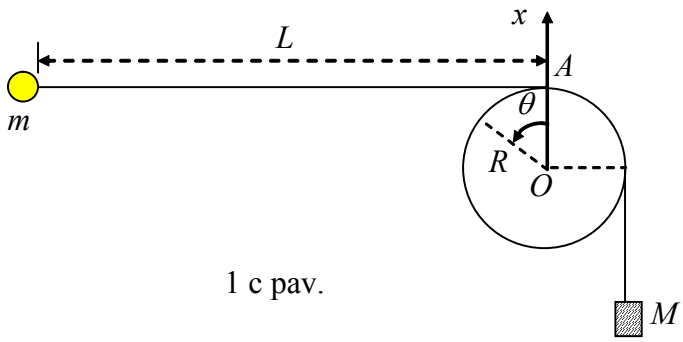
(h) [2.4 taško]. Koks yra dalelės greitis v_s kai siūlas yra vertikalus ir kai QP yra mažiausio ilgio? (išreikšti per g ir R).

(i) [1.9 taškos]. Koks yra dalelės greitis v_H aukščiausiame taške H jai atsilenkus į kitą strypo pusę? (išreikšti per g ir R).

C dalis

C dalyje m masės rutuliukas nepritvirtintas taške A, o svyruoklė permestu per strypą siūlu sujungta su sunkesniu M masės pasvarėliu kaip parodyta 1c pav.

Pradžioje dalelė laikoma nejudama A lygyje, o siūlas įtemptas žemiau O esančio pasvarėlio. Svyruoklė paleidžiama, ir pasvarėlis pradeda kristi. Laikome, kad svyruoklė svyruoja vertikalioje plokštumoje, o pasvarėlis jai netrukdo svyruoti. Dinaminė trintis tarp siūlo ir strypo yra maža. Bet statinė trintis pakankamai didelė, kad pasvarėlis kartą sustojęs (t. y., jo greičiui tapus nuliu) jau nebejudėtų.



1 c pav.

(j) [3.4 taško]. Laikome, kad pasvarėlis sustojo nusileidęs atstumą D ir kad $(L–D) >> R$. Jei dalelė gali svyruoti apie strypą taip, kad kampas įgautų vertę $\theta = 2\pi$, santykis $\alpha = D/L$ turi būti ne mažesnis už krizinę vertę α_c. Atmesdami narius R/L didumo ir aukštesnio laipsnio gaukite apytikslę α_c išraišką per M/m.

Sprendimas

A Dalis

(a) Kadangi siūlo ilgis $L = s + R\theta$ yra pastovus, jo kitimo išvestinė turi būti nulis:

$\dot{s} + R\dot{\theta} = 0$ (A1)

(b) O atžvilgiu Q juda R spindulio apskritimu kampiniu greičiu $\dot{\theta}$, todėl

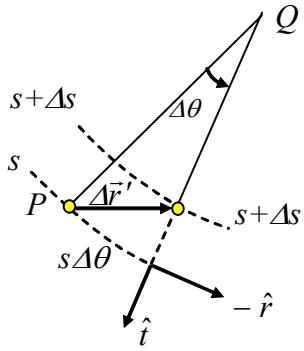
$\vec{v}_Q = R\dot{\theta}\hat{t} = -\dot{s}\hat{t}$ (A2)

(c) Pagal pav. A1. Q atžvilgiu P poslinkis per laiko tarpą Δt yra $\Delta\vec{r}' = (s\Delta\theta)(-\hat{r}) + (\Delta s)\hat{t} = [(s\dot{\theta})(-\hat{r}) + \dot{s}\hat{t}]\Delta t$. Todėl

$\vec{v}' = -s\dot{\theta}\hat{r} + \dot{s}\hat{t}$ (A3)

(d) Dalelės greitis O atžvilgiu yra dviejų santykinių greičių, pateiktų lygtimis (A2) ir (A3) suma:

$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_Q = (-s\dot{\theta}\hat{r} + \dot{s}\hat{t}) + R\dot{\theta}\hat{t} = -s\dot{\theta}\hat{r}$ (A4)

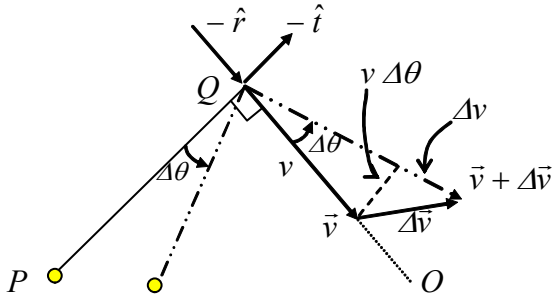


A 1 pav

(e) Pagal pav. A2. $(-\hat{t})$ greičio komponentės pokytis $\Delta\vec{v}$ duoda $(-\hat{t})\cdot\Delta\vec{v} = v\Delta\theta = v\dot{\theta}\Delta t$. Todėl pagreičio $\vec{a} = \Delta\vec{v}/\Delta t$ $\hat{t}$ komponentė gaunama iš $\hat{t}\cdot\hat{a} = -v\dot{\theta}$. Kadangi pagal (A4) dalelės greitis yra $s\dot{\theta}$, jos pagreičio $\hat{t}$ komponentė taške P yra

$\vec{a}\cdot\hat{t} = -v\dot{\theta} = -(s\dot{\theta})\dot{\theta} = -s\dot{\theta}^2$ (A5)*

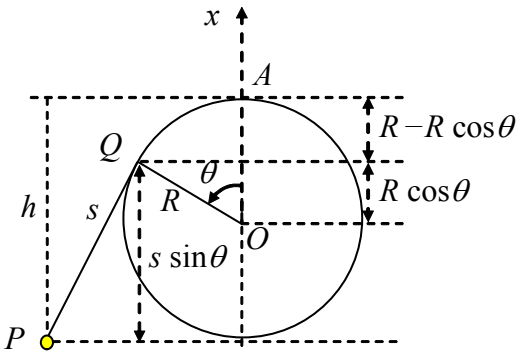
Iš A2 pav. galima pastebėti, kad radialioji pagreičio komponentė gali būti išreikšta taip: $\vec{a}\cdot\hat{r} = -dv/dt = -d(s\dot{\theta})/dt$.



A 2 pav.

(f) Pagal A3 pav. dalelės gravitacinė potencinė energija yra $U = -mgh$. Per s ir θ ją galima parašyti taip:

$U(\theta) = -mg[R(1-\cos\theta) + s\sin\theta]$ (A6)



A 3 pav.

(g) Žemiausiame trajektorijos taške dalelės gravitacinė potencinė energija U įgauna minimalią vertę U_m. Kai visa dalelės machaninė energija E lygi U_m, jos kinetinė energija turi būti lygi nuliui. Dalelė tada

turi būti stabilios pusiausvyros, parodytos A4 pav. Taigi, potencinė energija pasiekia minimumą kai $\theta = \pi/2$ ar $s = L - \pi R/2$.

Iš A4 pav. ar (A6) minimali potencinė energija

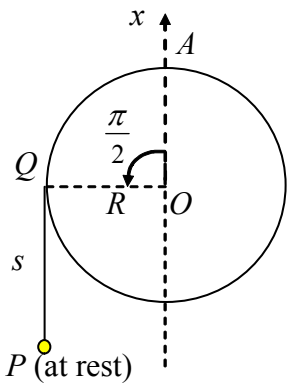
$$U_m = U(\frac{\pi}{2}) = -mg[R + L - (\pi R/2)]. \qquad \text{(A7)}$$

Pradžioje visa mechaninė energija E yra 0. Kadangi E nekinta, dalelės greitis v_m žemiausiame jos trajektorijos taške patenkina lygtį

$$E = 0 = \frac{1}{2}mv_m^2 + U_m. \qquad \text{(A8)}$$

Iš (A7) ir (A8) gauname

$$v_m = \sqrt{-2U_m/m} = \sqrt{2g[R + (L - \pi R/2)]}. \qquad \text{(A9)}$$



A 4 pav.

B dalis

(h) Iš (A6) visa dalelės mechaninė energija

$$E = 0 = \frac{1}{2}mv^2 + U(\theta) = \frac{1}{2}mv^2 - mg[R(1-\cos\theta) + s\sin\theta] \qquad \text{(B1)}$$

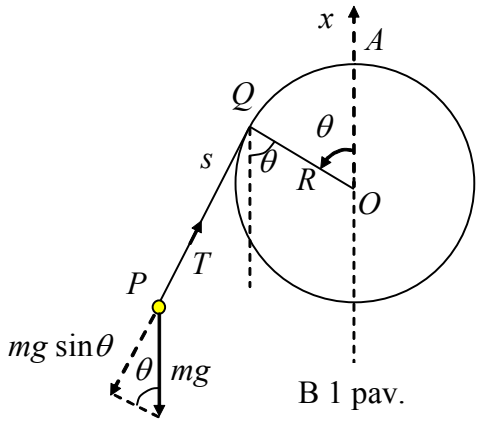
Iš (A4) greitis v yra lygus $s\dot{\theta}$. Todėl pagal (B1)

$$v^2 = (s\dot{\theta})^2 = 2g[R(1-\cos\theta) + s\sin\theta] \qquad \text{(B2)}$$

Siūlo įtempimą pažymim T. Tada sutinkamai su B1 pav. dalelę veikiančios jėgos $\hat{t}$-komponentė yra $-T + mg\sin\theta$. Iš (A5) dalelės liestinis pagreitis yra $(-s\dot{\theta}^2)$. Tada pagal antrąjį Niutono dėsnį

$$m(-s\dot{\theta}^2) = -T + mg\sin\theta \qquad \text{(B3)}$$

Iš paskutinių dviejų lygčių išreiškiame įtempimą



B 1 pav.

$$T = m(s\dot{\theta}^2 + g\sin\theta) = \frac{mg}{s}[2R(1-\cos\theta) + 3s\sin\theta] =$$

$$= \frac{2mgR}{s}[\tan\frac{\theta}{2} - \frac{3}{2}(\theta - \frac{L}{R})](\sin\theta) = \qquad \text{(B4)}$$

$$= \frac{2mgR}{s}(y_1 - y_2)(\sin\theta)$$

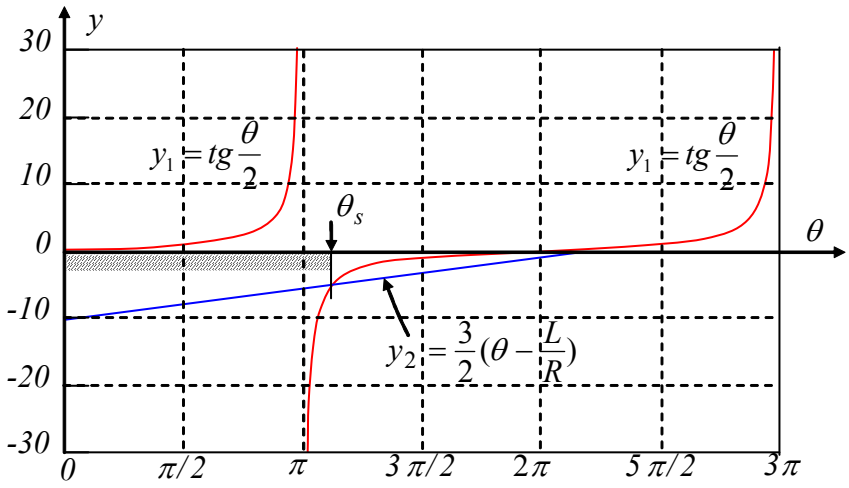
Funkcijos $y_1 = \tan(\theta/2)$ ir $y_2 = 3(\theta - L/R)/2$ pavaizduotos B2 pav.

Iš (B4) ir B2 pav. gauname rezultatus, pateiktus B1 lentelėje. Kampas, kuriam esant $y_2 = y_1$ pažymėtas θ_s ($\pi < \theta_s < 2\pi$) ir gaunamas iš išraiškos

$$\frac{3}{2}(\theta_s - \frac{L}{R}) = \tan\frac{\theta_s}{2} \qquad \text{(B5)}$$

arba

$$\frac{L}{R} = \theta_s - \frac{2}{3}\tan\frac{\theta_s}{2} \qquad \text{(B6)}$$



B2 pav.

Lentelė B1

	$(y_1 - y_2)$	$\sin\theta$	tension T
$0 < \theta < \pi$	teigiamas	teigiamas	teigiamas
$\theta = \pi$	$+\infty$	0	teigiamas
$\pi < \theta < \theta_s$	neigiamas	neigiamas	teigiamas
$\theta = \theta_s$	0	neigiamas	0
$\theta_s < \theta < 2\pi$	teigiamas	neigiamas	neigiamas

Kai santykis *L/R* yra žinomas ir lygus

$$\frac{L}{R} = \frac{9\pi}{8} + \frac{2}{3} ctg\frac{\pi}{16} = (\pi + \frac{\pi}{8}) - \frac{2}{3} tg\frac{1}{2}(\pi + \frac{\pi}{8}) \quad \text{(B7)}$$

galima matyti, kad $\theta_s = 9\pi/8$.

B1 lentelė rodo, kad įtempimas T teigiamas (t.y/, siūlas įtemptas ir tiesus) kampui įgaunant vertes $0<\theta < \theta_s$. Kai θ pasiekia θ_s įtempimas T tampa nuliu ir siūlo dalis, neliečianti strypo, tampa netiesi. Trumpiausia galima $s_{\min}$ tiesios atkarpos *QP* vertė gaunama esant $\theta = \theta_s$ ir yra lygi

$$s_{\min} = L - R\theta_s = R(\frac{9\pi}{8} + \frac{2}{3}\cot\frac{\pi}{16} - \frac{9\pi}{8}) = \frac{2R}{3}\cot\frac{\pi}{16} = 3.352R \quad \text{(B8)}$$

Kai $\theta = \theta_s$ turime $T = 0$, o (B2) ir (B3) tada duoda $v^2 = -gs\sin\theta$. Taigi, greitis v_s yra

$$v_s = \sqrt{-gs_{\min}\sin\theta_s} = \sqrt{\frac{2gR}{3}\cot\frac{\pi}{16}\sin\frac{\pi}{8}} = \sqrt{\frac{4gR}{3}}\cos\frac{\pi}{16} \quad \text{(B9)}$$

$$= 1.133\sqrt{gR}$$

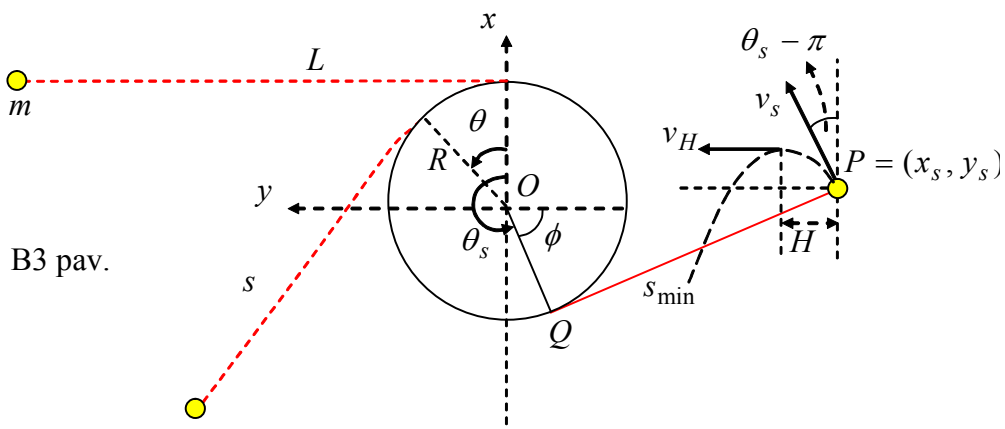
(i) Kai $\theta \geq \theta_s$ dalelė juda kaip laisvai krintantis kūnas. Kaip parodyta B3 pav., ji juda iš taško $P = (x_s, y_s)$ pradiniu greičiu v_s, sudarančiu kampą $\phi = (3\pi/2 - \theta_s)$ su *y* ašimi.

Dalelės greitis v_H aukščiausiame trajektorijos taške esant parabolinei trajektorijai lygus pradinio greičio *y*-komponentei. Taigi,

$$v_H = v_s\sin(\theta_s - \pi) = \sqrt{\frac{4gR}{3}}\cos\frac{\pi}{16}\sin\frac{\pi}{8} = 0.4334\sqrt{gR} \quad \text{(B10)}$$

Dalelės nueitas nuo taško *P* horizontalus atstumas *H* iki maksimalaus aukščio taško yra

$$H = \frac{v_s^2\sin 2(\theta_s - \pi)}{2g} = \frac{v_s^2}{2g}\sin\frac{9\pi}{4} = 0.4535R \quad \text{(B11)}$$



B3 pav.

Dalelės koordinatės kai $\theta = \theta_s$ yra

$$x_s = R\cos\theta_s - s_{\min}\sin\theta_s = -R\cos\frac{\pi}{8} + s_{\min}\sin\frac{\pi}{8} = 0.358R \qquad \text{(B12)}$$

$$y_s = R\sin\theta_s + s_{\min}\cos\theta_s = -R\sin\frac{\pi}{8} - s_{\min}\cos\frac{\pi}{8} = -3.478R \qquad \text{(B13)}$$

Akivaizdu, kad $|y_s| > (R+H)$. Todėl dalelė gali iš tikrųjų pasiekti maksimalų aukštį neatsimušusi į strypo paviršių.

Dalis C

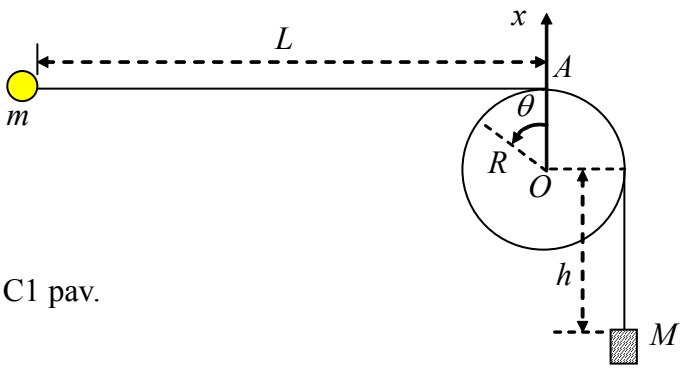
(j) Tegu pasvarėlis pradiniu momentu yra aukščiu h žemiau O kaip pateikta C1 pav..

Kai pasvarėlis nukrito atstumą D ir sustojo, mechaninės energijos tvermės dėsnis, pritaikytas sistemai dalelė-pasvarėlis, duoda

$$-Mgh = E' - Mg(h+D) \qquad \text{(C1)}$$

Čia E' yra visa mechaninė dalelės energija pasvarėliui sustojus. Tada

$$E' = MgD \qquad \text{(C2)}$$



C1 pav.

Tegu Λ visas siūlo ilgis. Tada jo vertė esant $\theta = 0$ turi būti tokia pati, kaip ir bet kuriam kitam kampui θ esant. Todėl

$$\Lambda = L + \frac{\pi}{2}R + h = s + R(\theta + \frac{\pi}{2}) + (h+D) \qquad \text{(C3)}$$

Pastebėję, kad $D = \alpha L$ ir pažymėję $\ell = L - D$, galime parašyti

$$\ell = L - D = (1-\alpha)L \qquad \text{(C4)}$$

Iš pastarųjų dviejų lygčių gauname

$$s = L - D - R\theta = \ell - R\theta \qquad \text{(C5)}$$

Pasvarėliui sustojus visai dalelės mechaninei energijai galioja tvermės dėsnis. Pagal (C2) vietoj (B1) gauname tokią lygtį:

$$E' = MgD = \frac{1}{2}mv^2 - mg[R(1-\cos\theta) + s\sin\theta] \qquad \text{(C6)}$$

Dalelės greičio kvadratas

$$v^2 = (s\dot{\theta})^2 = \frac{2MgD}{m} + 2gR[(1-\cos\theta) + \frac{s}{R}\sin\theta] \quad . \text{(C7)}$$

Vėl pritaikius (B3) siūlo įtempimui T gauname

$$-T + mg\sin\theta = m(-s\dot{\theta}^2) \qquad \text{(C8)}$$

Iš pastarųjų dviejų lygčių seka

$$T = m(s\dot{\theta}^2 + g\sin\theta)$$

$$= \frac{mg}{s}[\frac{2M}{m}D + 2R(1-\cos\theta) + 3s\sin\theta] \qquad \text{(C9)}$$

$$= \frac{2mgR}{s}[\frac{MD}{mR} + (1-\cos\theta) + \frac{3}{2}(\frac{\ell}{R} - \theta)\sin\theta]$$

Gaunant paskutinę lygybę panaudota (C5).

Dabar įvedame funkciją

$$f(\theta) = 1 - \cos\theta + \frac{3}{2}(\frac{\ell}{R} - \theta)\sin\theta \qquad \text{(C10)}$$

Kadangi $\ell = (L-D) >> R$, galime rašyti

$$f(\theta) \approx 1 + \frac{3}{2}\frac{\ell}{R}\sin\theta - \cos\theta = 1 + A\sin(\theta - \phi) \qquad \text{(C11)}$$

kur pažymėta

$$A = \sqrt{1 + (\frac{3}{2}\frac{\ell}{R})^2}\ , \quad \phi = \tan^{-1}\frac{\frac{3\ell}{2R}}{\sqrt{1 + (\frac{3\ell}{2R})^2}} \qquad \text{(C12)}$$

Iš (C11) gaunama minimali $f(\theta)$ vertė

$$f_{\min} = 1 - A = 1 - \sqrt{1 + (\frac{3}{2}\frac{\ell}{R})^2} \qquad \text{(C13)}$$

Kol T lieka neneigiamas dalelei svyruojant apie strypą iš (C9) gauname nelygybę

$$\frac{MD}{mR} + f_{\min} = \frac{M(L-\ell)}{mR} + 1 - \sqrt{1 + (\frac{3\ell}{2R})^2} \geq 0 \qquad \text{(C14)}$$

arba

$$(\frac{ML}{mR}) + 1 \ \geq\ (\frac{M\ell}{mR}) + \sqrt{1 + (\frac{3\ell}{2R})^2} \approx (\frac{M\ell}{mR}) + (\frac{3\ell}{2R}) \qquad \text{(C15)}$$

Panaudojus (C4), galima (C15) parašyti taip

$$(\frac{ML}{mR}) + 1 \ \geq\ [(\frac{ML}{mR}) + (\frac{3L}{2R})](1 - \alpha) \qquad \text{(C16)}$$

Atmetant (R/L) ir to santykio aukštesnius laipsnius gaunama nelygybė

$$\alpha \ \geq\ 1 - \frac{(\frac{ML}{mR}) + 1}{(\frac{ML}{mR}) + (\frac{3L}{2R})} = \frac{(\frac{3L}{2R}) - 1}{(\frac{ML}{mR}) + (\frac{3L}{2R})} = \frac{1 - \frac{2R}{3L}}{\frac{2M}{3m} + 1} \approx \frac{1}{1 + \frac{2M}{3m}} \qquad \text{(C17)}$$

Todėl santykio D/L krizinė vertė

$$\alpha_c = \frac{1}{(1 + \frac{2M}{3m})} \qquad \text{(C18)}$$

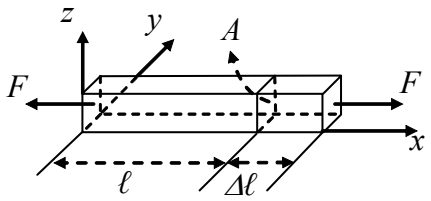
Teorinė užduotis 2

Pjezoelectrinio kristalo resonatorius esant kintamai įtampai

Turime vienalytį strypą ilgio ℓ ir skerspjūvio ploto A (2a pav.). Jo ilgis pakinta dydžiu $\Delta\ell$ kai vienodo didumo priešingų krypčių jėgos F veikia jo priešingus galus statmenai galų paviršiui. Įtempimas T į galo paviršių apibrėžiamas kaip F/A. Ilgio santykinis pokytis $\Delta\ell/\ell$ vadinamas strypo deformacija S. Deformaciją ir įtempimą suriša Huko dėsnis

$$T = Y\,S \ \text{ arba } \ \frac{F}{A} = Y\frac{\Delta\ell}{\ell} \qquad (1)$$

čia Y strypo medžiagos Jungo modulis. Laikome, kad suspaudžiantis įtempimas T atitinka $F < 0$ ir mažina ilgį (t.y., $\Delta\ell < 0$). Toks įtempimas yra neigiamas ir susietas su slėgiu p: $T = -p$.



2a pav.

Vienalyčiam tankio ρ strypui išilginių bangų plitimo greitis (t.y., garso greitis) išilgai strypo išreiškiamas taip:

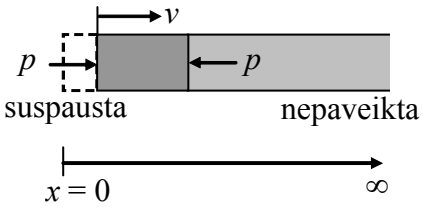
$$u = \sqrt{Y/\rho} \qquad (2)$$

Slopinimo ir sklaidos poveikio nepaisome.

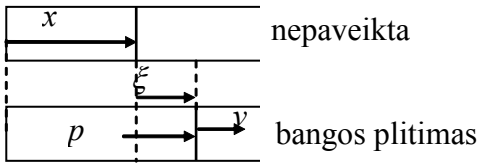
Dalis A: mechaninės savybės

Vienalytis pusiau begalinis strypas, besitęsiantis nuo $x = 0$ iki ∞ (2b pav.), turi tankį ρ. Pradžioje jis nejuda ir yra neįtemptas. Stūmoklis labai trumpam laikui Δt sudaro mažą slėgį p į kairįjį paviršių esant $x = 0$ sukurdamas slėgio bangą, plintančią į dešinę greičiu u.

(a) Jei stūmoklis sukelia strypo kairiojo paviršiaus judėjimą pastoviu greičiu v (2b pav.),



2b pav.



2c pav.

kokia turi būti deformacija S ir slėgis p į kairįjį paviršių per laiką Δt? Atsakymai turi būti pateikti tik per ρ, u ir v. [1.6 taško]

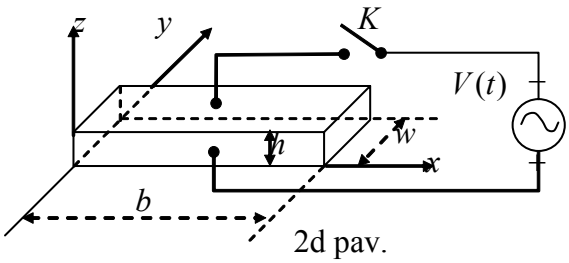
(b) Tegu strypu x kryptimi sklinda išilginės bangos. Nepaveikto strypo taškui x (Pav. 2c) turime poslinkį $\xi(x, t)$ laiko momentu t, ir imame

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin k(x - ut) \qquad (3)$$

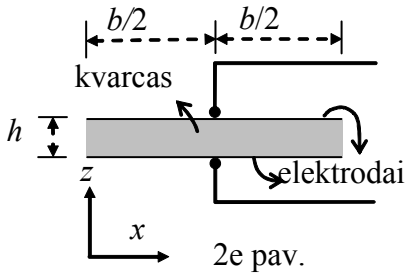
čia ξ_0 ir k yra konstantos. Nustatykite greitį $v(x, t)$, deformaciją $S(x, t)$ ir slėgį $p(x,t)$ kaip x ir t funkcijas. [2.4 taško]

Dalis B: elektromechaninės savybės (įskaitant pjezoelektrinį efektą)

Turime ilgio b, storio h, ir pločio w kvarco kristalo plokštelę (Pav. 2d). Jos ilgis ir storis orientuoti išilgai x ir z ašių. Elektrodai yra plonos metalinės dangos ant viršutinio ir apatinio plokštelės paviršių. Elektriniai kontaktai prilituoti elektrodų viduryje (Pav. 2e) ir laikomi nejudamais esant išilginiams svyravimams x kryptimi.



2d pav.



2e pav.

Kvarco tankis $\rho = 2.65\times10^3$ kg/m^3 ir Jungo modulis $Y = 7.87\times10^{10}$ N/m^2. Plokštelės ilgis $b = 1.00$ cm plotis w aukštis h tokie, kad $h << w$ ir $w << b$. Kai jungiklis K išjungtas kvarco plokštelėje galima sužadinti tik x krypties stovinčias išilgines bangas.

Stovinčiom dažnio $f = \omega / 2\pi$ bangom lako momentu t taške x atsilenkimas nuo pusiausvyros padėties gali būti parašytas taip:

$$\xi(x, t) = 2\xi_0\, g(x) \cos \omega t, \quad (0 \le x \le b) \qquad (4a)$$

čia ξ_0 yra teigiama konstanta, o koordinatinė funkcija $g(x)$ yra tokia:

$$g(x) = B_1 \sin k(x - \frac{b}{2}) + B_2 \cos k(x - \frac{b}{2}). \qquad (4b)$$

$g(x)$ maksimali vertė vienetas, o $k = \omega/u$. dar prisiminkime, kad elektrodų viduriai nejuda, o kairysis ir dešinysis plokštelės paviršiai yra laisvi ir nespaudžiami.

(c) Nustatykite B_1 ir B_2 stovinčios bangos kvarco plokštelėje išraiškoje (4b). [1.2 taško]

(d) Kokie yra du mažiausi dažniai, kuriems gali susidaryti kvarco plokštelėje stovinčios bangos? [1.2 taško]

Pjezoelektrinis efektas yra ypatinga kvarco kristalo savybė. Kristalo suspaudimas ar ištempimas kristale sukuria potencialų skirtumą, ir atvirkščiai, tarp kristalo paviršių sudarius

potencialų skirtumą kristalas išsiplečia ar sutrumpėja priklausomai nuo potencialo poliariškumo. Todėl mechaniniai ir elektriniai virpesiai susieti tarpusavyje ir kvarco kristale gali rezonuoti.

Tirdami pjezoelektrinį efektą ant apatinio ir viršutinio elektrodų sudarome krūvius,kurių tankiai atitinkamai $-\sigma$ ir $+\sigma$, todėl kvarco plokštelė yra z krypties ir stiprio E elektriniame lauke. Pažymime plokštelės deformaciją ir įtempimą x kryptimi atitinkamai S ir T. Tada kvarco kristalo pjezoelektrinį efektą galima aprašyti tokiomis lygtimis:

$$S = (1/Y)T + d_p E \qquad (5a)$$

$$\sigma = d_p T + \varepsilon_T E \qquad (5b)$$

čia $1/Y = 1.27\times10^{-11}$ m^2/N yra stangrumo koeficientas (t.y., atvirkščias Jungo moduliui dydis) pastoviame elektriniame lauke, $\varepsilon_T = 4.06\times10^{-11}$ F/m yra skvarba esant pastoviai deformacijai, $d_p = 2.25\times10^{-12}$ m/V yra pjezoelektrinis koeficientas.

Sujungus jungiklį K pav. 2d į elektrodus paduodama kintama įtampa $V(t) = V_m \cos \omega t$, ir kvarco plokštelėje susidaro vienalytis z krypties elektrinis laukas $E(t) = V(t)/h$. Procesui nusistovėjus plokštelėje susidaro x krypties ciklinio dažnio ω išilginė stovinti banga.

Kai E vienalytis stovinčios bangos ilgis λ ir dažnis f susieti išraiška $\lambda = u/f$, čia u išreikštas lygtimi (2). Bet sutinkamai su lygtimi (5a) formulė $T = YS$ nebegalioja, nors deformacijos ir įtempimo apibrėžimas išlieka nepakeistas, o plokštelės galiniai paviršiai laisvi ir nespaudžiami.

(e) Atsižvelgdami į (5a) ir (5b) ir krūvio tankį σ ant apatinio elektrodo laikydami x ir t funkcija, išreikštą formule

$$\sigma(x,t) = \left[D_1 \cos k\left(x - \frac{b}{2} \right) + D_2 \right] \frac{V(t)}{h},$$

čia $k = \omega/u$, gaukite D_1 ir D_2 išraiškas. [2.2 taško]

(f) Visas paviršinis krūvis ant apatinio elektrodo $Q(t)$ su $V(t)$ susietas išraiška

$$Q(t) = [1 + \alpha^2 (\frac{2}{kb} \tan \frac{kb}{2} - 1)] C_0 V(t) \qquad (6)$$

Gaukite C_0 išraišką ir α^2 skaitinę vertę. [1.4 taško]

Sprendimas

Dalis A

(a) Pagal pav. A1 kairysis strypo paviršius pasislenka atstumą $v\Delta t$ kai slėgio banga nueina atstumą $u\Delta t$, čia $u = \sqrt{Y/\rho}$. Kairiojo galo deformacija yra

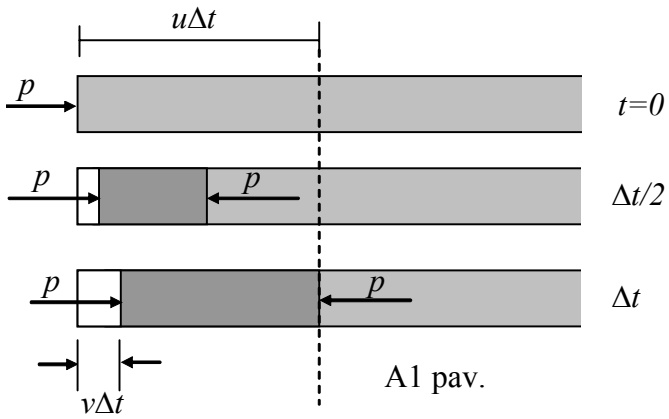
$$S = \frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{-v\Delta t}{u\Delta t} = \frac{-v}{u} \qquad (A1a)$$

Iš Huko dėsnio slėgis į kairįjį paviršių yra

$$p = -YS = Y\frac{v}{u} = \rho u v \qquad (A1b)$$

(b) Greitis v susietas su poslinkiu ξ kaip harmoniniame svyravime (pav. A2) ciklinio dažnio $\omega = ku$. Todėl imdami $\xi(x,t) = \xi_0 \sin k(x - ut)$, gauname

$$v(x,t) = -ku\xi_0 \cos k(x - ut). \qquad \text{(A2)}$$



A1 pav.

Deformacija ir slėgis susieti kaip dalyje (a), t.y.,

$$S(x,t) = -v(x,t)/u = k\xi_0 \cos k(x - ut) \qquad \text{(A3)}$$

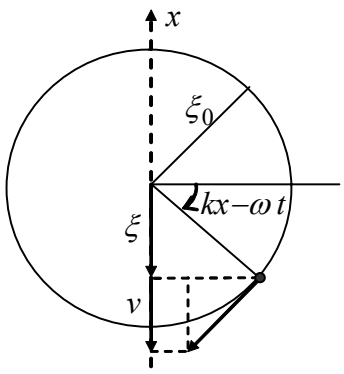
$$p(x,t) = \rho u v(x,t) = -k\rho u^2 \xi_0 \cos k(x - ut) = \\ = -YS(x,t) = -kY\xi_0 \cos k(x - ut) \qquad \text{(A4)}$$

Tai galima gauti ir imant išvestines:

$$v(x,t) = \frac{\Delta\xi}{\Delta t} = -ku\xi_0 \cos k(x - ut),$$

$$S(x,t) = \frac{\Delta\xi}{\Delta x} = k\xi_0 \cos k(x - ut),$$

$$p(x,t) = -Y\frac{\Delta\xi}{\Delta x} = -kY\xi_0 \cos k(x - ut).$$



A2 pav

Dalis B

(c) Kai duoti ciklinis dažnis ω ir plitimo greitis u, bangos ilgis išreiškiamas taip $\lambda = 2\pi / k$, čia $k = \omega / u$. Poslinkio ξ erdvinį pasiskirstymą aprašome formule

$$g(x) = B_1 \sin k(x - \frac{b}{2}) + B_2 \cos k(x - \frac{b}{2}) \qquad \text{(B1)}$$

Kadangi elektrodų viduriai laikomi nejudančiais, $g(b/2) = 0$. Iš čia seka $B_2 = 0$. Kadangi duota, jog maksimali $g(x)$ yra 1, gauname $A = \pm 1$, ir tada

$$g(x) = \pm \sin \frac{\omega}{u}(x - \frac{b}{2}) \qquad \text{(B2)}$$

Taigi, poslinkis yra

$$\xi(x,t) = \pm 2\xi_0 \sin \frac{\omega}{u}(x - \frac{b}{2}) \cos \omega t \qquad \text{(B3)}$$

(d) Kadangi slėgis p (ar įtempimas T) kvarco plokštelės galuose turi išnykti (t.y., kai $x = 0$ ir $x = b$), užduotis sprendinį gauname kaip skaičiuodami rezonansinius garso bangų dažnius ilgio b vamzdyje abiem atvirais galais. Be to, negalimos lyginės pagrindinio tono harmonikos, nes elektrodų viduriai nejuda. Pagrindinį toną atitinka $\lambda = 2b$, todėl dažnis $f_1 = u/(2b)$. Bangų plitimo greitis

$$u = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} = \sqrt{\frac{7.87 \times 10^{10}}{2.65 \times 10^3}} = 5.45 \times 10^3 \text{ m/s} \qquad \text{(B4)}$$

todėl imant $b = 1.00 \times 10^{-2}$ m, du mažiausi stovinčių bangų dažniai yra

$$f_1 = \frac{u}{2b} = 273 \text{ (kHz)}, \; f_3 = 3f_1 = \frac{3u}{2b} = 818 \text{ (kHz)} \qquad \text{(B5)}$$

[*Alternatyvus užduočių (c) ir (d) sprendimas*]:

Išilginė stovinti banga turi mazgą taške $x = b/2$. tai paaiškinama laikant, jog plinta dvi bangos priešingomis kryptimis. Taigi, atsilenkimas ir greitis išreiškiami taip:

$$\xi(x,t) = \xi_m[\sin k(x - \frac{b}{2} - ut) + \sin k(x - \frac{b}{2} + ut)] = 2\xi_m \sin k(x - \frac{b}{2})\cos\omega t \qquad \text{(B6)}$$

$$v(x,t) = -ku\xi_m[\cos k(x - \frac{b}{2} - ut) - \cos k(x - \frac{b}{2} + ut) = -2\omega\xi_m \sin k(x - \frac{b}{2})\sin\omega t \qquad \text{(B7)}$$

čia $\omega = ku$ o laužtiniuose skliausteliuose esantys nariai vaizduoja bangas, plintančias $+x$ ir $-x$ kryptimis. Pastebėję, kad (B6) identiška (B3) gauname $\xi_m = \pm\xi_0$.

Bangai, plintančiai $-x$ kryptimi, (A1a) ir (A1b) greitis v turi būti pakeistas $-v$, taigi,

$$S = \frac{-v}{u} \text{ ir } p = \rho uv \quad \text{(banga plinta } +x \text{ kryptimi)} \qquad \text{(B8)}$$

$$S = \frac{v}{u} \text{ ir } p = -\rho uv \quad \text{(banga plinta } -x \text{ kryptimi)} \qquad \text{(B9)}$$

Kaip užduotyje (b), deformacija ir slėgis yra

$$\begin{aligned} S(x,t) &= -k\xi_m[-\cos k(x - \frac{b}{2} - ut) - \cos k(x - \frac{b}{2} + ut)] \\ &= 2k\xi_m \cos k(x - \frac{b}{2})\cos\omega t \end{aligned} \qquad \text{(B10)}$$

$$\begin{aligned} p(x,t) &= -\rho u\omega\xi_m[\cos k(x - \frac{b}{2} - ut) + \cos k(x - \frac{b}{2} + ut)] \\ &= -2\rho u\omega\xi_m \cos k(x - \frac{b}{2})\cos\omega t \end{aligned} \qquad \text{(B11)}$$

Pažymim, kad v, S, ir p gali būti gauti diferencijuojant ξ kaip užduotyje (b).

Įtempimas T ar slėgis p visą laiką turi būti nulis abiejuose plokštelės galuose ($x = 0$ ir $x = b$), nes jie laisvi. Iš (B11) tai gaunam tik kai $\cos(kb/2) = 0$, arba

$$kb = \frac{\omega}{u}b = \frac{2\pi f}{\lambda f}b = n\pi, \qquad n = 1, 3, 5, \cdots \qquad \text{(B12)}$$

Panaudojus bangos ilgį λ (B12) gali būti parašyta taip:

$$\lambda = \frac{2b}{n}, \qquad n = 1, 3, 5, \cdots. \qquad \text{(B13)}$$

Dažniai yra tokie:

$$f = \frac{u}{\lambda} = \frac{nu}{2b} = \frac{n}{2b}\sqrt{\frac{Y}{\rho}}, \qquad n = 1, 3, 5, \cdots. \qquad \text{(B14)}$$

Tai identiška rezultatams, kuriuos duoda (B4) ir (B5).

(e) Iš (5a) ir (5b) pjezoelektrinis efektas aprašomas lygtimis

$$T = Y(S - d_p E) \qquad \text{(B15)}$$

$$\sigma = Yd_p S + \varepsilon_T(1 - Y\frac{d_p^2}{\varepsilon_T})E \qquad \text{(B16)}$$

Kadangi $x = b/2$ u yra išilginės stovinčios bangos mazgas, atsilenkimas ξ ir deformacija S turi būti pavidalo (B6) ir (B10), t.y., imant $\omega = ku$,

$$\xi(x,t) = \xi_m \sin k(x - \frac{b}{2})\cos(\omega t + \phi) \qquad \text{(B17)}$$

$$S(x,t) = k\xi_m \cos k(x - \frac{b}{2})\cos(\omega t + \phi) \qquad \text{(B18)}$$

čia fazė ϕ įrašyta į laikinį daugiklį. Laikome, kad elektrinis laukas tarp elektrodų yra vienalytis ir kinta laikui bėgant, t.y.,

$$E(x,t) = \frac{V(t)}{h} = \frac{V_m \cos\omega t}{h}. \qquad \text{(B19)}$$

Įstatydami (B18) ir (B19) į (B15), gauname

$$T = Y[k\xi_m \cos k(x - \frac{b}{2})\cos(\omega t + \phi) - \frac{d_p}{h} V_m \cos \omega t] \qquad \text{(B20)}$$

Įtempimas T visą laiką turi būti nulis abiejuose plokštelės galuose ($x = 0$ ir $x = b$). Taip bus tik kai $\phi = 0$ ir

$$k\xi_m \cos\frac{kb}{2} = d_p \frac{V_m}{h} \qquad \text{(B21)}$$

Kai $\phi = 0$, (B16), (B18) ir (B19) rodo, kad paviršinio tankio priklausomybė nuo laiko išreiškiama taip:

$$\sigma(x,t) = \sigma(x)\cos\omega t \qquad \text{(B22)}$$

o priklausomybė nuo x yra

$$\begin{aligned}\sigma(x) &= Yd_p k\xi_m \cos k(x - \frac{b}{2}) + \varepsilon_T(1 - Y\frac{d_p^2}{\varepsilon_T})\frac{V_m}{h} \\ &= [Y\frac{d_p^2}{\cos\frac{kb}{2}}\cos k(x - \frac{b}{2}) + \varepsilon_T(1 - Y\frac{d_p^2}{\varepsilon_T})]\frac{V_m}{h}\end{aligned} \qquad \text{(B23)}$$

(f) Laiko momentu t visas paviršinis krūvis $Q(t)$ apatiniame elektrode gaunamas integruojant $\sigma(x,t)$ išraiškoje (B22) visu elektrodo paviršiumi. Gauname

$$\begin{aligned}\frac{Q(t)}{V(t)} &= \frac{1}{V(t)}\int_0^b \sigma(x,t)\,w dx = \frac{1}{V_m}\int_0^b \sigma(x) w\, dx \\ &= \frac{w}{h}\int_0^b [Y\frac{d_p^2}{\cos\frac{kb}{2}}\cos k(x - \frac{b}{2}) + \varepsilon_T(1 - Y\frac{d_p^2}{\varepsilon_T})]dx \\ &= (\varepsilon_T\frac{bw}{h})[Y\frac{d_p^2}{\varepsilon_T}(\frac{2}{kb}\tan\frac{kb}{2}) + (1 - Y\frac{d_p^2}{\varepsilon_T})] \\ &= C_0[\alpha^2(\frac{2}{kb}\tan\frac{kb}{2}) + (1 - \alpha^2)]\end{aligned} \qquad \text{(B24)}$$

čia

$$C_0 = \varepsilon_T\frac{bw}{h}, \quad \alpha^2 = Y\frac{d_p^2}{\varepsilon_T} = \frac{(2.25)^2 \times 10^{-2}}{1.27 \times 4.06} = 9.82 \times 10^{-3} \qquad \text{(B25)}$$

(Konstanta α vadinama *elektromechaninio sąryšio koeficientu*.)

Pastaba: rezultatas $C_0 = \varepsilon_T bw/h$ gali būti iš karto pastebėtas paėmus statinę ribą $k = 0$ išraiškoje (5). Kadangi $tgx \approx x$ kai $x << 1$, turime

$$\lim_{k\to 0} Q(t)/V(t) \approx C_0[\alpha^2 + (1 - \alpha^2)] = C_0 \qquad \text{(B26)}$$

Akivaizdu, kad konstanta C_0 yra plokščiojo kondensatoriaus, kurį sudaro elektrodai (ploto bw) ir kvarco plokštelė (storio h ir dielektrinės skvarbos ε_T), talpa. Ji lygi

$$\varepsilon_T bw/h. \qquad \text{(B27)}$$

Teorinė užduotis 3

Dalis A

Neutrino masė ir neutrono skylimas

Masės m_n laisvas nejudantis laboratorinėje koordinačių sistemoje neutronas skyla į tris nesąveikaujančias daleles: protoną, elektroną ir antineutriną. Protono rimties masė m_p, antineutrino m_ν laikoma nelygi nuliui, bet žymiai mažesnė už elektrono rimties masę m_e. Šviesos greitį vakuume pažymime c. Išmatuotos tolios masių vertės:

m_n□939,56563 MeV/c^2, m_p□ 938,27231 MeV/c^2, m_e□0,5109907 MeV/c^2

Toliau energijos ir greičiai pateikiami laboratorinėje koordinačių sistemoje. Tegu E yra

susidariusio skylant elektrono energija.

(a) Raskite maksimalią galimą E vertę E_{max} ir antineutrino greitį v_m kai $E = E_{max}$. Atsakymai turi būti pateikti per dalelių rimties mases ir šviesos greitį. Laikydami, kad $m_\nu < 7{,}3$ eV/c^2, apskaičiuokite E_{max} it santykį v_m/c 3 ženklų tikslumu. [4.0 taško]

Dalis B

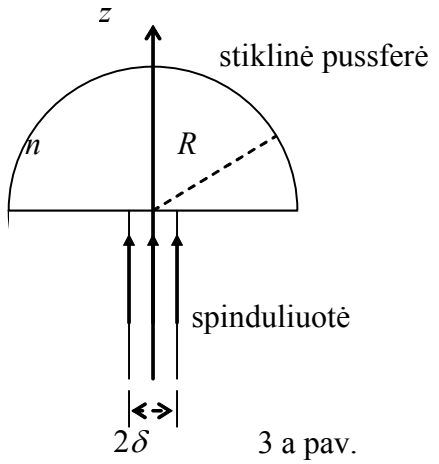
Levitacija veikiant šviesai

Permatoma stiklinė pussferė R spindulio ir m masės pagaminta iš medžiagos, kurios lūžio rodiklis n. Aplinkos lūžio rodiklis lygus vienetui. Monochromatinis lygiagrečių lazerio spindulių pluoštas krinta iš apačios į centrinę plokščiojo paviršiaus dalį kaip parodyta pav. 3a. Laisvojo kritimo pagreitis $\vec{g}$ nukreiptas vertikaliai žemyn. Lazerio spindulių pluošto skerspjūvio spindulys δ daug mažesnis už R. Stiklinė pussferė ir lazerio spindulių pluoštas simetriški z ašies atžvilgiu.

Stiklinė pussferė šviesos visai nesugeria. Jos paviršiai padengti plonu skaidriu sluoksniu taip, kad krintanti ir išeinanti šviesa nuo paviršių visai neatsispindi. Spindulių eiga paviršiniuose sluoksniuose nykstamai maža.

(b) Atmesdami narius $(\delta/R)^3$ ir aukštesnio laipsnio nustatykite lazerio galią P, reikalingą kompensuoti stiklinės pussferės sunkį [4.0 taškos]

Nuoroda: $\cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$ kai θ žymiai mažesnis už vienetą.



3 a pav.

Teorinės užduoties 3 sprendimas

Dalis A

Neutrino masė ir neutrono skylimas

(a) Tegu $(c^2E_e, c\vec{q}_e)$, $(c^2E_p, c\vec{q}_p)$ ir $(c^2E_\nu, c\vec{q}_\nu)$ yra elektrono, protono ir anti-neutrino energijos-impulso keturmačiai vektoriai nejudančio neutrono koordinačių sistemoje. $E_e, E_p, E_\nu, \vec{q}_e, \vec{q}_p, \vec{q}_\nu$ yra pateikti masės vienetais. Galima laikyti, kad protonas ir anti-neutrinas sudaro sistemą, kurios rimties masė M_c, visa energija c^2E_c ir visas judesio kiekis $c\vec{q}_c$. Taigi, turime

$$E_c = E_p + E_\nu, \qquad \vec{q}_c = \vec{q}_p + \vec{q}_\nu, \qquad M_c^2 = E_c^2 - q_c^2 \qquad \text{(A1)}$$

Čia vektoriaus $\vec{q}_c$ modulis pažymėtas q_c. Tai taikoma ir kitiems vektoriams.

Kadangi skylant neutronui galioja energijos ir judesio kiekio tvermės dėsniai, gauname

$$E_c + E_e = m_n \qquad \text{(A2)}$$

$$\vec{q}_c = -\vec{q}_e \qquad \text{(A3)}$$

Paskutinę lygtį pakėlus kvadratu gauname lygybę

$$q_c^2 = q_e^2 = E_e^2 - m_e^2 \qquad \text{(A4)}$$

Iš (A4) ir trečiosios lygybės (A1) gauname

$$E_c^2 - M_c^2 = E_e^2 - m_e^2 \qquad \text{(A5)}$$

Perkėlus pastarojoje lygtyje antrą ir trečią narius į priešingas lygybės puses ir padalinus iš (A2) gauname

$$E_c - E_e = \frac{1}{m_n}(M_c^2 - m_e^2) \qquad \text{(A6)}$$

Išsprendę (A2) ir (A6) lygčių sistemą gauname

$$E_c = \frac{1}{2m_n}(m_n^2 - m_e^2 + M_c^2) \qquad \text{(A7)}$$

$$E_e = \frac{1}{2m_n}(m_n^2 + m_e^2 - M_c^2) \qquad \text{(A8)}$$

Panaudoję (A8) paskutinę (A4) lygybę galime perrašyti taip:

$$\begin{aligned} q_e &= \frac{1}{2m_n}\sqrt{(m_n^2 + m_e^2 - M_c^2)^2 - (2m_n m_e)^2} = \\ &= \frac{1}{2m_n}\sqrt{(m_n + m_e + M_c)(m_n + m_e - M_c)(m_n - m_e + M_c)(m_n - m_e - M_c)} \end{aligned} \qquad \text{(A9)}$$

(A8) rodo, kad maksimalią E_e atitinka minimali M_c^2. Rimties masė M_c yra protono ir antineutrino poros visa energija jų masės centro koordinačių sistemoje, ir jos minimali vertė yra

$$M = m_p + m_\nu \qquad \text{(A10)}$$

Kai protonas ir antineutrinas toje koordinačių sistemoje nejuda. Taigi, iš (A8) ir (A10) maksimali elektrono energija $E = c^2E_e$ yra

$$E_{\max} = \frac{c^2}{2m_n}\left[m_n^2 + m_e^2 - (m_p + m_\nu)^2\right] \approx 1.292569 \text{ MeV} \approx 1.29 \text{ MeV} \qquad \text{(A11)}$$

Kai galioja (A10) protonas ir antineutrinas juda vienodu greičiu v_m, kuris yra jų masės centro greitis, todėl

$$\frac{v_m}{c} = \left(\frac{q_\nu}{E_\nu}\right)\Big|_{E=E_{\max}} = \left(\frac{q_p}{E_p}\right)\Big|_{E=E_{\max}} = \left(\frac{q_c}{E_c}\right)\Big|_{E=E_{\max}} = \left(\frac{q_e}{E_c}\right)\Big|_{M_c=m_p+m_\nu} \qquad \text{(A12)}$$

čia paskutinė lygybė seka iš (A3). Panaudojus (A7) ir (A9), paskutinė (A12) išraiška gali būti panaudota antineutrino greičiui gauti esant $E = E_{\max}$. Taigi, kai $M = m_p + m_\nu$, turime

$$\begin{aligned} \frac{v_m}{c} &= \frac{\sqrt{(m_n + m_e + M)(m_n + m_e - M)(m_n - m_e + M)(m_n - m_e - M)}}{m_n^2 - m_e^2 + M^2} \\ &\approx 0.00126538 \approx 0.00127 \end{aligned} \qquad \text{(A13)}$$

[Alternatyvus sprendinys]

Tegu nejudančioje koordinačių sistemoje elektronas išlekia turėdamas judesio kiekį $c\vec{q}_e$ ir energiją c^2E_e, protonas $c\vec{q}_p$ ir c^2E_p ir antineutrinas su $c\vec{q}_\nu$ ir c^2E_ν. Vektoriaus $\vec{q}_\alpha$ modulį žymėdami q_α, gauname

$$E_p^2 = m_p^2 + q_p^2, \quad E_\nu^2 = m_\nu^2 + q_\nu^2, \quad E_e^2 = m_e^2 + q_e^2 \qquad \text{(1A)}$$

Energijos ir judesio kiekio tvermės dėsniai, pritaikyti neutrono skylimui, duoda

$$E_p + E_\nu = m_n - E_e \qquad \text{(2A)}$$

$$\vec{q}_p + \vec{q}_\nu = -\vec{q}_e \qquad \text{(3A)}$$

Pakėlus kvadratu gauname

$$E_p^2 + E_\nu^2 + 2E_pE_\nu = (m_n - E_e)^2 \qquad \text{(4A)}$$

$$q_p^2 + q_\nu^2 + 2\vec{q}_p \cdot \vec{q}_\nu = q_e^2 = E_e^2 - m_e^2 \qquad \text{(5A)}$$

Atimdami (5A) iš (4A) panaudodami (1A) žymėjimus gauname

$$m_p^2 + m_\nu^2 + 2(E_p E_\nu - \vec{q}_p \cdot \vec{q}_\nu) = m_n^2 + m_e^2 - 2m_n E_e \qquad (6A)$$

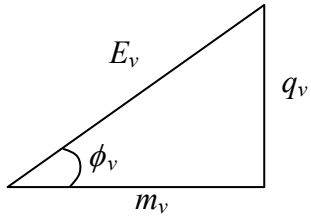
arba

$$2m_n E_e = m_n^2 + m_e^2 - m_p^2 - m_\nu^2 - 2(E_p E_\nu - \vec{q}_p \cdot \vec{q}_\nu) \qquad (7A)$$

jei θ yra kampas tarp $\vec{q}_p$ ir $\vec{q}_\nu$, turime $\vec{q}_p \cdot \vec{q}_\nu = q_p q_\nu \cos\theta \le q_p q_\nu$, todėl (7A) duoda sąryšį

$$2m_n E_e \le m_n^2 + m_e^2 - m_p^2 - m_\nu^2 - 2(E_p E_\nu - q_p q_\nu) \qquad (8A)$$

Lygybė išraiškoje (8A) galioja tik kai $\theta = 0$, t.y., elektrono energija c^2E_e įgauna maksimalią vertę kai antineutrinas ir protonas juda ta pačia kryptimi.



A 1 pav.

Tegu nejudančioje koordinačių sistemoje protono ir antineutrino greičiai yra atitinkamai $c\beta_p$ ir $c\beta_\nu$. Tada $q_p = \beta_p E_p$ ir $q_\nu = \beta_\nu E_\nu$. Kaip parodyta pav. A1, antineutrinui įvedame kampą ϕ_ν ($0 \le \phi_\nu < \pi/2$)

$$q_\nu = m_\nu \tan\phi_\nu, \quad E_\nu = \sqrt{m_\nu^2 + q_\nu^2} = m_\nu \sec\phi_\nu, \quad \beta_\nu = q_\nu / E_\nu = \sin\phi_\nu \qquad (9A)$$

Panašiai rašome protonui $0 \le \phi_p < \pi/2$,

$$q_p = m_p \tan\phi_p, \quad E_p = \sqrt{m_p^2 + q_p^2} = m_p \sec\phi_p, \quad \beta_p = q_p / E_p = \sin\phi_p \qquad (10A)$$

Tada (8A) gali būti parašyta taip:

$$2m_n E_e \le m_n^2 + m_e^2 - m_p^2 - m_\nu^2 - 2m_p m_\nu \left(\frac{1 - \sin\phi_p \sin\phi_\nu}{\cos\phi_p \cos\phi_\nu}\right) \qquad (11A)$$

Daugiklis skliausteliuose gali būti pakeistas taip:

$$\frac{1 - \sin\phi_p \sin\phi_\nu}{\cos\phi_p \cos\phi_\nu} = \frac{1 - \sin\phi_p \sin\phi_\nu - \cos\phi_p \cos\phi_\nu}{\cos\phi_p \cos\phi_\nu} + 1 = \frac{1 - \cos(\phi_p - \phi_\nu)}{\cos\phi_p \cos\phi_\nu} + 1 \ge 1 \qquad (12A)$$

ir įgauna minimalią galimą vertę 1 kai $\phi_p = \phi_\nu$, t.y., kai antineutrinas ir protonas juda tuo pačiu greičiu, taigi, $\beta_p = \beta_\nu$. Tada iš (11A) seka, kad maksimali E_e vertė yra

$$\begin{aligned}(E_e)_{\max} &= \frac{1}{2m_n}(m_n^2 + m_e^2 - m_p^2 - m_\nu^2 - 2m_p m_\nu) = \\ &= \frac{1}{2m_n}[m_n^2 + m_e^2 - (m_p + m_\nu)^2]\end{aligned} \qquad (13A)$$

ir maksimali elektrono energijos vertė $E = c^2E_e$ yra

$$E_{\max} = c^2 (E_e)_{\max} \approx 1.292569 \text{ MeV} \approx 1.29 \text{ MeV} \qquad (14A)$$

Kai antineutrinas ir protonas juda vienodu greičiu, iš (9A), (10A), (2A) ,(3A) ir (1A) gauname rezultatą

$$\beta_\nu = \beta_p = \frac{q_p}{E_p} = \frac{q_\nu}{E_\nu} = \frac{q_p + q_\nu}{E_p + E_\nu} = \frac{q_e}{m_n - E_e} = \frac{\sqrt{E_e^2 - m_e^2}}{m_n - E_e} \qquad (15A)$$

Įstatydami (13A) į paskutinę lygtį antineutrino greitį v_m esant maksimaliai elektrono energijai $E_{\max}$ ir $M = m_p + m_\nu$, gauname

$$\begin{aligned}\frac{v_m}{c} = (\beta_\nu)_{\max E_e} &= \frac{\sqrt{(E_e)_{\max}^2 - m_e^2}}{m_n - (E_e)_{\max}} = \frac{\sqrt{(m_n^2 + m_e^2 - M^2)^2 - 4m_n^2 m_e^2}}{2m_n^2 - (m_n^2 + m_e^2 - M^2)} \\ &= \frac{\sqrt{(m_n + m_e + M)(m_n + m_e - M)(m_n - m_e + M)(m_n - m_e - M)}}{m_n^2 - m_e^2 + M^2} \\ &\approx 0.00126538 \approx 0.00127\end{aligned} \qquad (16A)^*$$

Dalis B

Levitacija veikiant šviesai

(b) Panaudojame pav. B1. Šviesos lūžiui sferiniame paviršiuje gauname

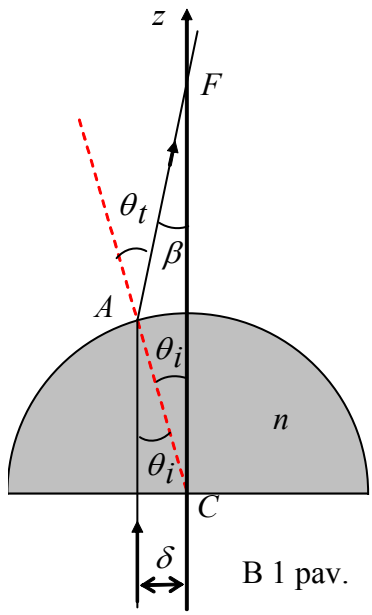
$$n\sin\theta_i = \sin\theta_t \qquad \text{(B1)}$$

Atmesdami narius $(\delta/R)^3$ar aukštesnio laipsnio sinuso laipsninėje eilutėje iš (B1) gauname

$$n\theta_i \approx \theta_t \qquad \text{(B2)}$$

Pav. B1 trikampiui ΔFAC turime

$$\beta = \theta_t - \theta_i \approx n\theta_i - \theta_i = (n-1)\theta_i \qquad \text{(B3)}$$



B 1 pav.

Tegu f_0 yra pradinis šviesos dažnis. Jei n_p yra skaičius fotonų, krintančių į plokščiąjį paviršių į vienetinį plotą per laiko vienetą, tai visas krintančių į plokščiąjį paviršių į vienetinį plotą per laiko vienetą fotonų skaičius yra $n_p\pi\delta^2$. Visa krintančių fotonų galia P yra $(n_p\pi\delta^2)(hf_0)$, čia h yra Planko konstanta. Taigi,

$$n_p = \frac{P}{\pi\delta^2 hf_0} \qquad \text{(B4)}$$

Skaičius fotonų, krintančių plokščiojo paviršiaus į žiedą, kurio vidinis spindulys r, išorinis $r+dr$ per laiko vienetą yra $n_p(2\pi rdr)$, o $r = R\tan\theta_i \approx R\theta_i$. Taigi,

$$n_p(2\pi rdr) \approx n_p(2\pi R^2)\theta_i d\theta_i \qquad \text{(B5)}$$

Kritusių į žiedą ir išlekiančių pro sferinį paviršių per laiko vienetą, sudarančių lūžusį spindulį, fotonų judesio kiekio z komponentė yra

$$dF_z = n_p\frac{hf_o}{c}(2\pi rdr)\cos\beta \approx n_p\frac{hf_0}{c}(2\pi R^2)(1-\frac{\beta^2}{2})\theta_i d\theta_i \approx$$
$$\approx n_p\frac{hf_0}{c}(2\pi R^2)[\theta_i - \frac{(n-1)^2}{2}\theta_i^3]d\theta_i \qquad \text{(B6)}$$

todėl viso išlekiančių per laiko vienetą fotonų judesio kiekio z komponentė yra

$$F_z = 2\pi R^2 n_p(\frac{hf_0}{c})\int_0^{\theta_{im}}[\theta_i - \frac{(n-1)^2}{2}\theta_i^3]d\theta_i =$$
$$= \pi R^2 n_p(\frac{hf_0}{c})\theta_{im}^2[1-\frac{(n-1)^2}{4}\theta_{im}^2] \qquad \text{(B7)}$$

čia $\tan\theta_{im} = \frac{\delta}{R} \approx \theta_{im}$. Taigi, gauname

$$F_z = \frac{\pi R^2 P}{\pi\delta^2 hf_0}(\frac{hf_0}{c})\frac{\delta^2}{R^2}[1-\frac{(n-1)^2\delta^2}{4R^2}] = \frac{P}{c}[1-\frac{(n-1)^2\delta^2}{4R^2}] \qquad \text{(B8)}$$

Levitaciją veikiant šviesai lemia krintančių į plokščią paviršių fotonų judesio kiekio ir išeinančių pro sferinį paviršių fotonų judesio kiekio z komponentės skirtumas:

$$\frac{P}{c} + (-F_z) = \frac{P}{c} - \frac{P}{c}[1-\frac{(n-1)^2\delta^2}{4R^2}] = \frac{(n-1)^2\delta^2}{4R^2}\frac{P}{c} \qquad \text{(B9)}$$

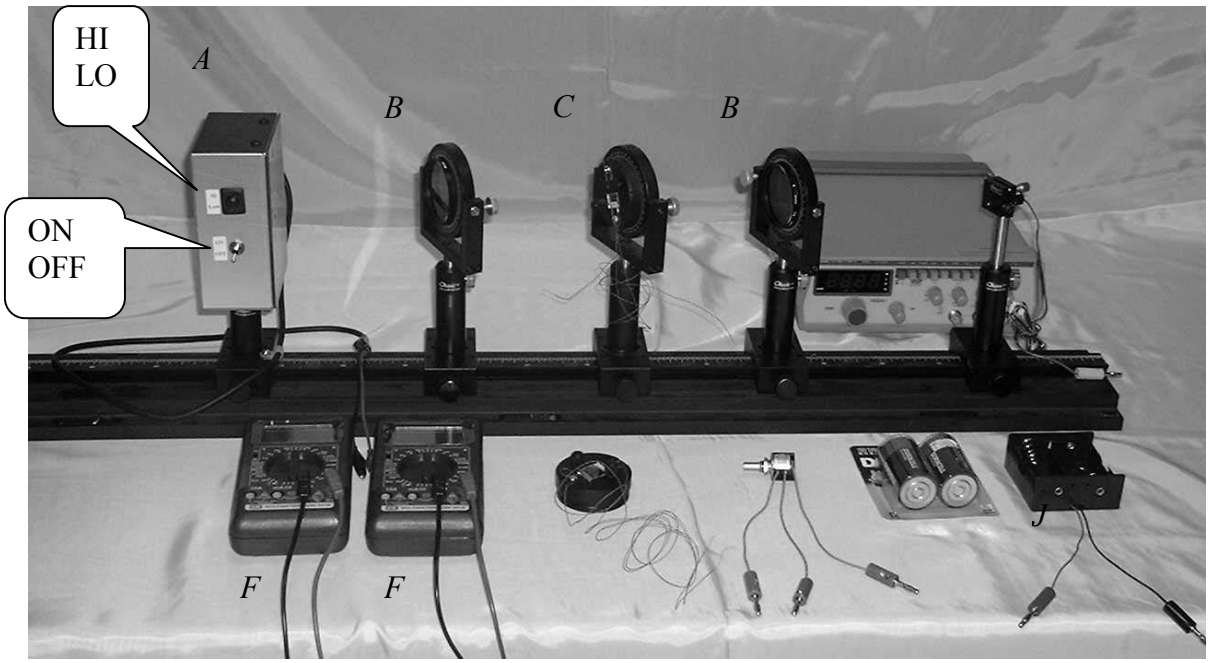
Prilygindami tą skirtumą pussferės sunkiui mg gauname lazerio minimalią galią, sukeliančią levitaciją:

$$P = \frac{4mgcR^2}{(n-1)^2\delta^2} \qquad \text{(B10)*}$$

Eksperimentas

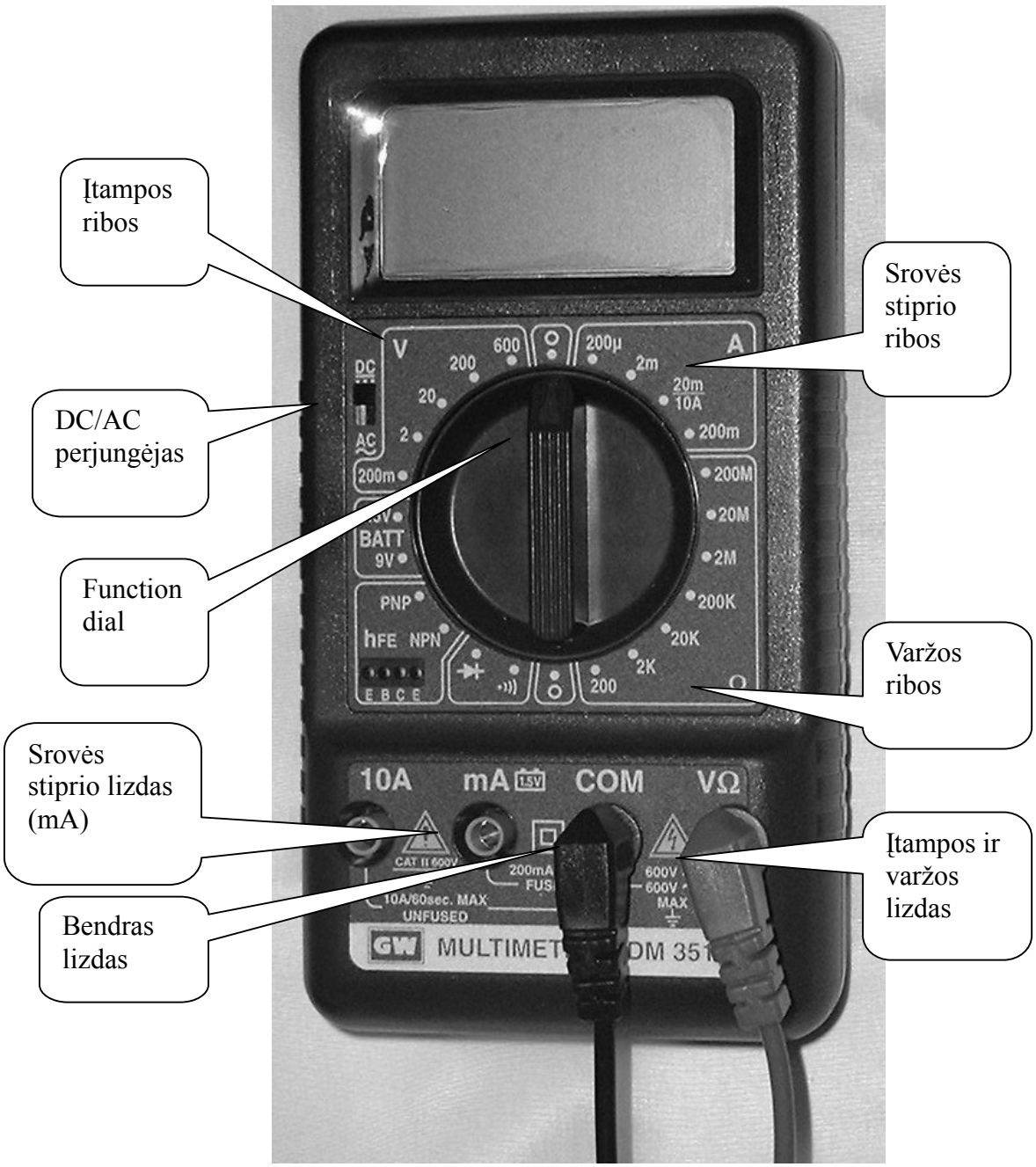
Įranga ir medžiagos

	Įranga ir medžiagos	Kiekis			Įranga ir medžiagos	Kiekis
A	Fotodetektorius (PD)	1		I	Baterijos	2
B	Poliarizatoriai su žiediniais apsodais	2		J	Baterijų dėžutė	1
C	90° TN-LC ląstelė (geltoni laidai) su žiediniais LC apsodais	1		K	Optinis suolelis	1
D	Funkcinis generatorius	1		L	Pusiau skaidrus popierius	2
E	Lazerinis diodas (LD)	1		M	Liniuotė	1
F	Multimetrai	2		N	Balta lipni juostelė (žymėjimams ant įrangos)	1
G	Lygiagreti LC ląstelė (oranžiniai laidai)	1		O	Žirklės	1
H	Keičiamas varžynas	1		P	Milimetrinis popierius	10



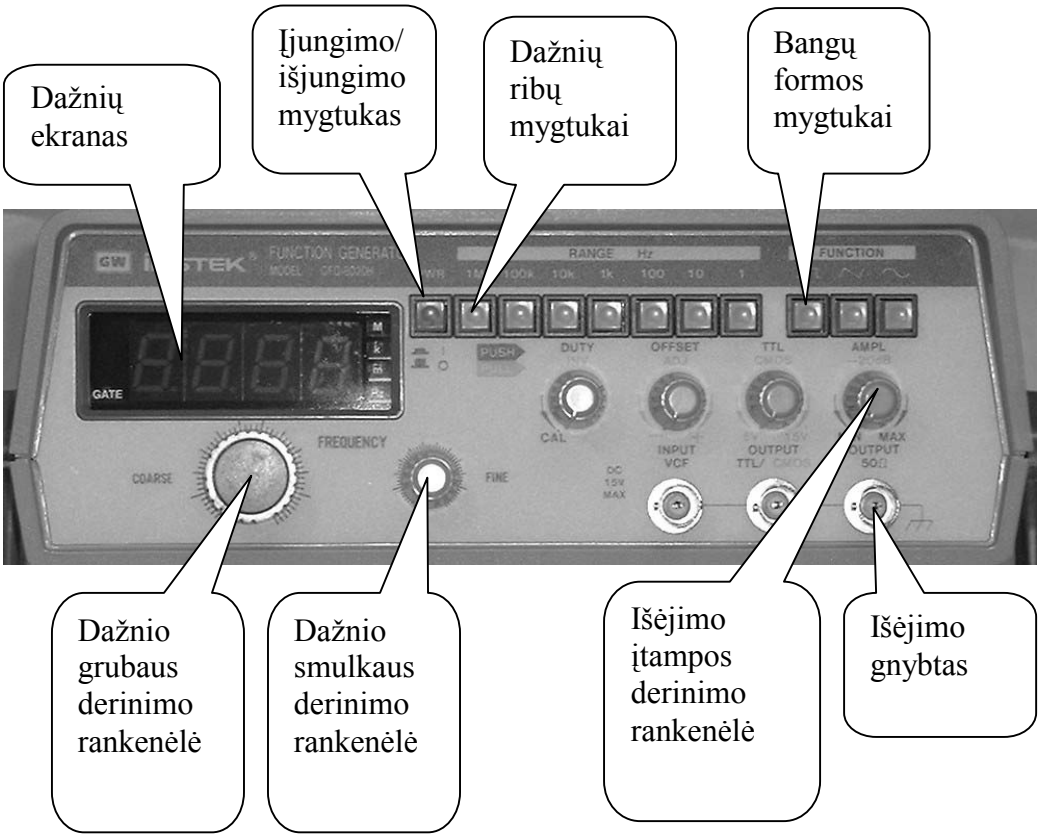
2. Instrukcija multimetrui:

- “DC/AC” perjungia DC arba AC matavimui.
- Naudokite “VΩ” ir “COM” įvadus įtampos ir varžos matavimams.
- Naudokite “mA” ir “COM” įvadus silpnų srovių matavimams. Displėjus tada rodo srovės stiprį miliamperais.
- Naudokite funkcinę skalę parinkdami reikiamą funkciją ir matavimų sritį. “V” yra įtampos matavimui, “A” srovės stiprio, “Ω ”varžos.


Įtampos ribos
DC/AC perjungėjas
Function dial
Srovės stiprio lizdas (mA)
Bendras lizdas
Srovės stiprio ribos
Varžos ribos
Įtampos ir varžos lizdas
V
DC
AC
600
200
20
2
200m
BATT
9V
PNP
hFE
NPN
E B C E
200µ
2m
20m
10A
200m
A
200M
20M
2M
200K
20K
2K
200
10A
mA
COM
VΩ
CAT II 600V
10A/60sec. MAX
UNFUSED
600V
MAX
GW
MULTIMET
DM 351

3. Instrukcija Funkciniam generatoriui:

- Įjungimo mygtukas paspaudus įjungia, o dar kartą paspaudus išjungia prietaisą
- Pasirinkite dažnių sritį ir paspauskite reikiamą mygtuką.
- Dažnis parodomas skaitmeniniame ekrane.
- Naudokite grubaus ir smulkaus derinimo rankenėles parinkdami reikiamą dažnį.
- Parinkite stačiakampių bangų formą paspausdami kairiausią bangų formos parinkimo mygtuką.
- Naudokite amplitudės parinkimo rankenėlę keisdami išėjimo įtampą.



Dalis A: Lazerinio diodo optinės savybės

I. Įvadas

1. Lazerinis diodas

Šiame eksperimente šviesos šaltinis yra lazerinis diodas, kuris spinduliuoja 650 nm bangos ilgio šviesą. Kai srovės stipris lazeriniame diode (LD) yra didesnis, negu slenkstinis, lazerinis diodas spinduliuoja monochromatinę, iš dalies poliarizuotą koherentinę šviesą. Kai srovės stipris lazeriniame diode yra mažesnis, negu slenkstinis, spinduliuojamos šviesos intensyvumas yra labai mažas. Srovės stipriui pasiekus slenkstinį šviesos intensyvumas staigiai padidėja ir toliau tiesiškai priklauso nuo srovės stiprio. Jei srovės stipris ir toliau didinamas, šviesos intensyvumas pradeda didėti lėčiau dėl lazerinio diodo temperatūros didėjimo. Todėl optimalus srovės stipris lazeriniam diodui atitinka spinduliavimo sritį, kurioje šviesos intensyvumas tiesiškai priklauso nuo srovės stiprio. Slenkstinis srovės stipris I_{th} apibrėžiamas kaip susikirtimo taškas srovės stiprio ašies su tiesinės šviesos intensyvumo priklausomybės srityje nubrėžtos tiesės tęsiniu.

2. Fotodetektorius

Fotodetektorius, naudojamas šiame bandyme, turi fotodiodą ir srovės stiprintuvą. Kai prie fotodiodo prijungiama išorinė įtampa, diodu teka šviesos indukuota fotosrovė. Esant pastoviai temperatūrai ir krintant monochromatiniai šviesai fotosrovės stipris proporcingas šviesos intensyvumui. Iš kitos pusės, srovės stiprintuvas fotosrovės stiprį paverčia išėjimo įtampa. Naudojamame fotodetektoriuje yra du režimai – didelio ir mažo stiprinimo. Mūsų bandyme naudojamas tik mažas stiprinimas. Tačiau dėl paties fotodiodo gaunamas įsotinimas esant 8 V, ir jei šviesos intensyvumas didesnis, fotodiodo parodymai neteisingi. Taigi, fotodetektoriaus veikimo sritis atitinka išėjimo įtampos tiesinės priklausomybės nuo apšviestumo sritį.

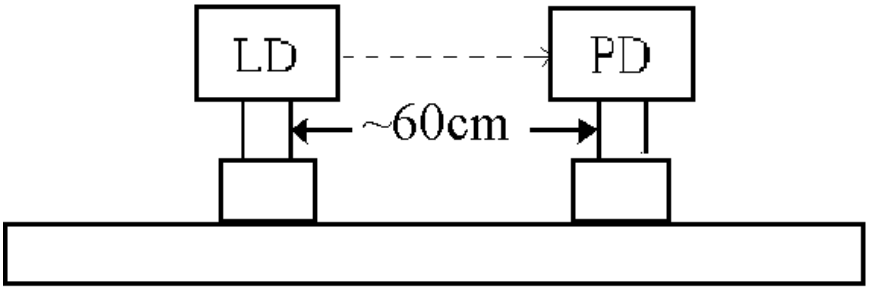
II. Eksperimentai ir duomenų apdorojimas

<u>Lazerinio diodo ir fotodetectoriaus charakteristikos</u>

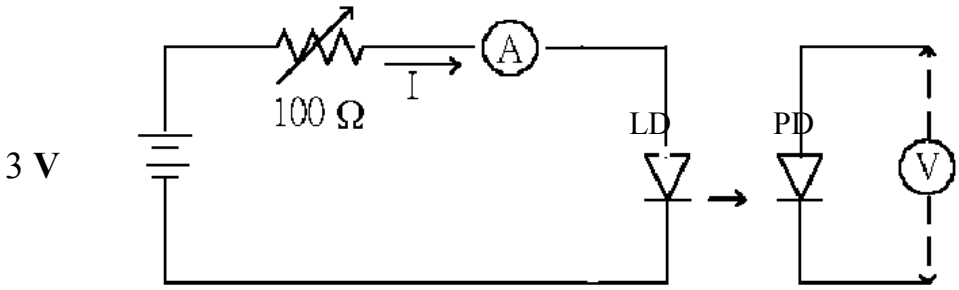
Norint sėkmingai atlikti bandymą būtina labai gerai suderinti šviesos spindulių kryptis tarp atskirų optinių elementų. Taip pat turi būti tinkamai parinkti šviesos šaltinio ir fotodetektoriaus darbo režimai. Dalyje A sprendžiamos nurodytos užduotys, o taip pat nustatomas šviesos poliarizacijos laipsnis.

1. Lazerinį diodą ir fotodetektorių įtvirtinam optiniame suolelyje vienodame aukštyje kaip parodyta pav. 5. Prijungiame kintamą varžyną, baterijas, amperemetrą, volmetrą, lazerinį diodą ir fotodetektorių pagal pav. 6. Suderiname kintamą varžyną taip, kad per LD tekėtų apie 25 mA stiprio srovė ir lazeris tinkamai šviestų. Parenkame fotodetektoriui žemą ribą. Sureguliuojame lazerinį diodą ir fotodetektorių taip, kad lazerio šviesa patektų į mažą skylutę detektoriaus dėžutėje ir fotodetektoriaus rodmenys būtų maksimalūs.

Nuoroda: neleiskite kontaktuoti baterijos juodam ir raudonam laidams, tai bateriją užtrumpins.



Pav. 5 Optinė schema (LD – lazerinis diodas; PD – fotodetektorius)



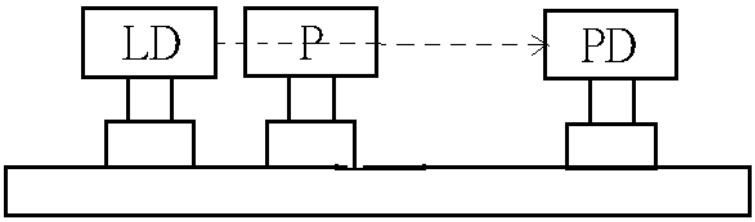
Pav. 6 Ekvivalentinė lazerinio diodo prijungimo schema

2. Panaudokite fotodetektoriaus išėjimo įtampą lazerio šviesos intensyvumui $\mathcal{J}$ pavaizduoti. Panaudokite kintamą varžyną keisti lazerinio diodo srovės stiprį I nuo nulio iki maksimalios vertės ir matuokite $\mathcal{J}$ kai I didėja. Parinkite tinkamus srovės stiprio pokyčius.

Klausimas A-(1) (1.5 taško) Išmatuokite, sudarykite lentelę ir pavaizduokite grafiškai $\mathcal{J}$ priklausomybę nuo I.

Klausimas A-(2) (3.5 taško) Apytiksliai nustatykite maksimalų srovės stiprį I_m tiesinėje $\mathcal{J}$ priklausomybės nuo I dalyje. Rodyklėmis (↓) pažymėkite $\mathcal{J}$ - I kreivės tiesinę dalį ir nustatykite slenkstinį srovės stiprį I_{th}.

3. Parinkite lazerinio diodo srovės stiprį dydžio $I_{th} + 2(I_m - I_{th})/3$ ir įsitikinkite kad lazerinis diodas ir fotodetektorius gerai veikia.
4. **Pasiruošimas bandymo daliai B:** įtaisykite poliarizatorių ant optinio suolelio prie pat lazerinio diodo, kaip parodyta pav. 7. Įsitikinkite, kad lazeri šviesa praeina pro centrinę poliarizatoriaus dalį. Sureguliuokite poliarizatorių taip, kad lazerio šviesa kristų statmenai poliarizatoriaus paviršiui. (Nuoroda: galite įdėti gabaliuką pusiau skaidraus popieriaus kaip bandomąjį ekraną patikrinant, ar krintančios ir atsispindėjusios šviesos dėmelės sutampa.)



Pav. 7. Poliarizatoriaus orientavimas (P – poliarizatorius)

5. Palaikydami lazerinio diodo srovę pastovią kitu pusiau skaidraus popieriaus gabaliuku patikrinkite ar šaltinis, detektorius ir poliarizatorius tinkamai išdėstyti, t.y., stovi ant vienos tiesės, o jų paviršiai statmeni šviesos spinduliui

Dalis B Nematinio skysto kristalo optinės savybės:

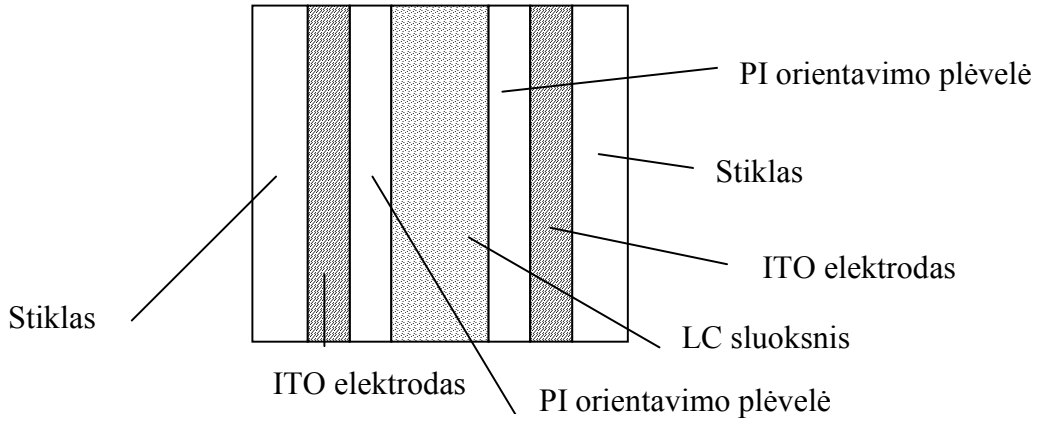
Elektro-optinės perjungimo charakteristikos 90° TN LC ląstelės

I. Įvadas

1. Skystas kristalas

Skystas kristalas (LC) yra medžiagos būsena, tarpinė tarp kieto kristalo ir amorfinio skysčio. Nematiniai skysti kristalai yra organiniai junginiai, turintieji pailgas, panašias į adatas molekules. Molekulių orientacija gali būti lengvai sutvarkoma ir valdoma elektriniu lauku. LC molekulių vienalytė ar lengvai keičiama orientacija naudojama daugumoje LC prietaisų. Naudojamos šiame bandyme LC ląstelės struktūra parodyta pav. 1. Nutrinta poliamidinė plėvelė gali sudaryti gerai išlygiuotą išankstinę orientaciją LC molekulėms ant substrato paviršiaus, ir visas LC sluoksnis molekulių sąveikos dėka įgauna vienalytę orientaciją. Vietinė molekulių orientacija vadinama LC orientacija duotame taške.

LC ląstelė pateikia taip vadinamą dvigubo lūžio reiškinį su dviem pagrindiniais lūžio rodikliais. Kai šviesa plinta orientacijos kryptimi, visų poliarizacijų komponentės plinta vienodu greičiu $v_o = c/n_o$, čia n_o yra vadinamas ordinariniu lūžio rodikliu. Ši sklidimo kryptis (orientacijos kryptis) yra vadinama LC ląstelės optine ašimi. Kai spinduliai plinta statmenai optinei ašiai bendrai yra du plitimo greičiai. Kai šviesos bangos elektrinis vektorius poliarizuotas statmenai (ar lygiagrečiai) optinei ašiai, šviesa plinta $v_o = \frac{c}{n_o}$ (arba $v_e = \frac{c}{n_e}$, čia n_e yra vadinamas ekstraordinariniu lūžio rodikliu). Dvigubas lūžimas (optinė anizotropija) apibrėžiama kaip skirtumas tarp ordinarinio ir ekstraordinarinio lūžio rodiklių $\Delta n \equiv n_e - n_o$.

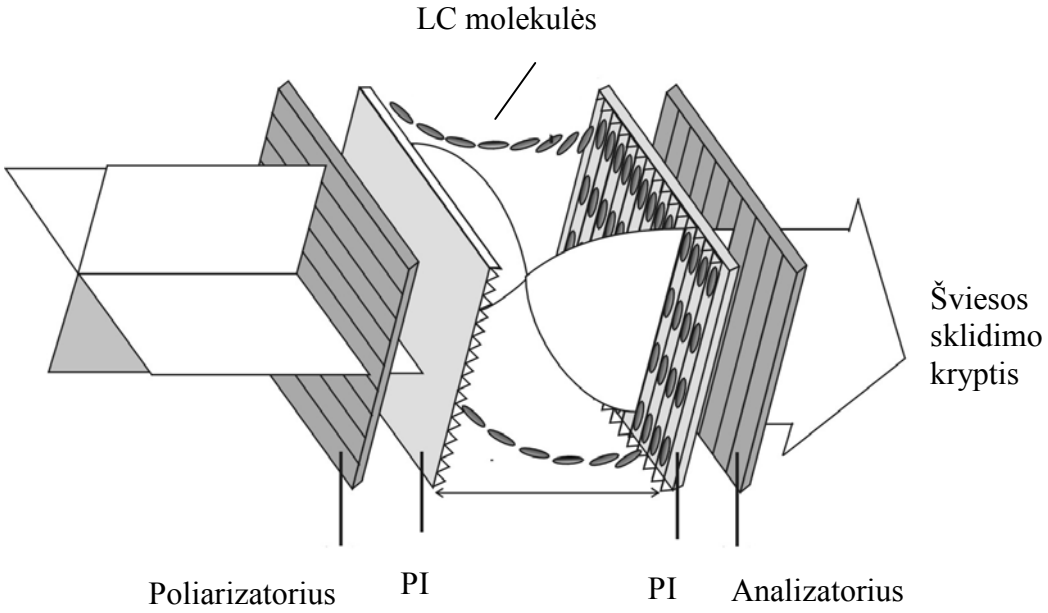


Pav. 1 LC ląstelės struktūra

2. 90° pasukino nematinė LC ląstelė

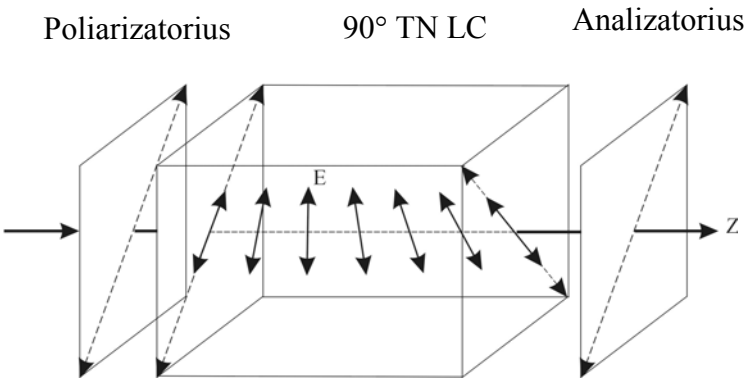
90° pasukanti nematinė (TN) ląstelė parodyta pav. 2, LC orientacija užpakaliniame paviršiuje yra pasukta 90° lyginant su priekiniu paviršiumi. Priekinio paviršiaus orientacija parinkta lygiagreti poliarizatoriaus pralaidumo ašiai. Pradinė nepoliarizuota šviesa paverčiama tiesiai poliarizuota šviesa priekiniu poliarizatoriumi.

Kai tiesiai poliarizuota šviesa eina per 90° TN ląstelę, jos poliarizacijos plokštuma pasisuka (poliarizuota tik n_e šviesa), ir išėjęs pluoštas yra taip pat tiesiai poliarizuotas, tai poliarizacijos ašis pasukta 90° (tai vadinama n_e poliarizacijos sukimu, panašiai gaunamas n_o poliarizacijos sukimo efektas). Todėl kai analizatoriaus (antro poliarizatoriaus pralaidumo ašis lygiagreti pirmojo poliarizatoriaus pralaidumo ašiai, šviesa pro ji nepraeina, jis yra tamsus, kaip parodyta pav. 3. tačiau kai LC ląstelėje sukurta įtampa V viršija krizinę vertę V_c, LC molekulės persirikiuoja išilgai išorinio elektrinio lauko krypties, kuris nukreiptas šviesos



Pav. 2 90° TN LC ląstelė

sklidimo kryptimi. Taigi, pradinė LC ląstelės poliarizacija pakeičiama ir šviesa pro analizatorių praeina. Elektrooptinio perjungimo polinkis γ apibrėžiamas išraiška $(V_{90}-V_{10})/V_{10}$, čia V_{10} ir V_{90} yra įtampos, kurioms atitinka 10% ir 90% šviesos pralaidumas.



Pav. 3 90° TN ląstelės poveikis

II. Eksperimentai ir jų apdorojimas

1. Patalpinkite 90° TN LC ląstelę tarp dviejų poliarizatorių su lygiagrečiomis pralaidumo ašimis ir panaudokite 100 Hz stačiakampę įtampos bangą iš funkcinio generatoriaus keisdami įtampą (V_{rms}) nuo 0 iki 7.2 V.
   *Krizinio taško aplinkoje paimkite, jei reikia, daugiau taškų.

Klausimas B-(1) (5.0 taško)
Išmatuokite, surašykite į lentelę ir pavaizduokite grafiškai elektrooptinę perjungimo kreivę (*J* priklausomybės nuo V_{rms} kreivę) NB 90° TN LC ir nustatykite perjungimo polinkį γ, čia γ yra $(V_{90}-V_{10})/V_{10}$.

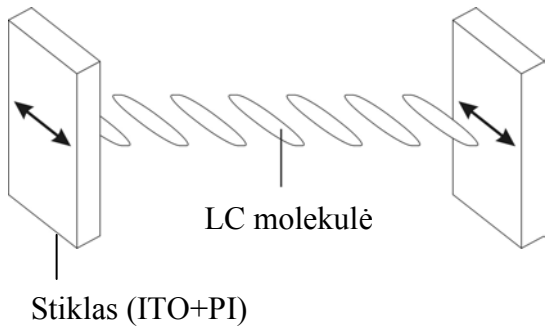
Klausimas B-(2) (2.5 taško)
Nustatykite naudojamos NB 90° TN LC ląstelės krizinę įtampą V_c. Grafiškai parodykite kaip nustatote V_c. vertę
Nuoroda:* Kai išorinė įtampa viršija kritinę vertę, šviesos pralaidumas greitai ir staigiai didėja.

Dalis C Nematinio skysto kristalo optinės savybės: Lygiagrečiai orientuotos LC ląstelės elektrooptinio perjungimo charakteristikos

I. Įvadas

Vienalytė lygiagrečiai orientuota LC ląstelė

Lygiagrečiai orientuotos LC ląstelės priekinio ir užpakalinio paviršių molekulės orientuotos vienos kitom lygiagrečiai kaip parodyta pav. 4. Kai į lygiagrečiai orientuotą ląstelę krinta tiesiai poliarizuota šviesa, kurios poliarizacija sutampa su ląstelės poliarizacijos kryptimi, gaunama tik fazinė moduliacija, nes šviesa elgiasi kaip ekstraordinarinių spindulių pluoštas.



Pav. 4 Vienalytė lygiagrečiai orientuota LC ląstelė

Iš kitos pusės, jei tiesiai poliarizuota šviesa krinta statmenai į lygiagrečiai orientuotą ląstelę, bet šviesos poliarizacijos kryptis sudaro $\theta = 45^o$ kampą su ląstelės orientacijos kryptimi (Pav. 8 dalyje C), Fazių skirtumas atsiranda dėl ordinarinio ir ekstraordinarinio spindulių plitimo greičių skirtumo LC terpėje. Esant $\theta = 45^o$ ir lygiagrečiai poliarizatorių konfigūracijai, lygiagrečiai orientuotos LC ląstelės pralaidumas yra

$$T_{\parallel} = \cos^2 \frac{\delta}{2}$$

Fazių skirtumas δ išreiškiamas taip:

$$\delta = 2\pi d \Delta n\,(V,\lambda)\,/\lambda$$

čia d yra LC sluoksnio storis, λ yra bangos ilgis ore, V yra AC įtampos kvadrato vidurkio šaknis, o Δn yra λ ir V funkcija ir vadinama LC dvigubo lūžio rodikliu. Reikia pažymėti, kad esant V = 0, Δn (= n_e–n_o) turi maksimalią vertę, kaip ir δ. Taip pat Δn mažėja kai V didėja. Bendru atveju

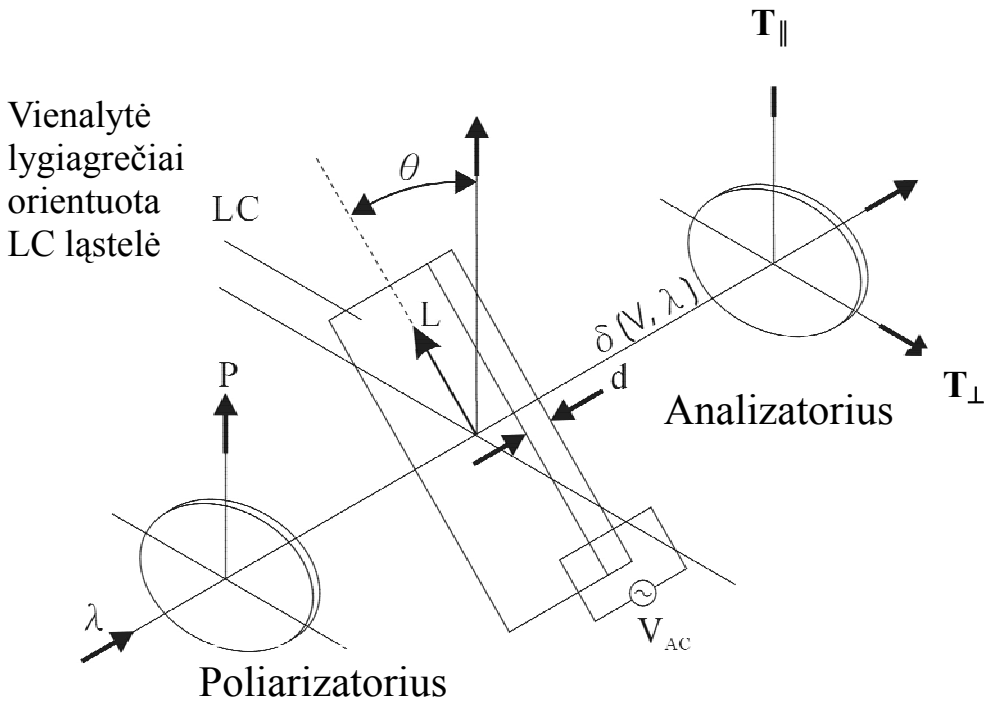
$$T_{\parallel} = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\delta}{2}$$

$$T_{\perp} = \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\delta}{2}$$

čia ∥ ir ⊥ atitinka atvejus, kai analizatoriaus pralaidumo ašis yra atitinkamai lygiagreti ar statmena poliarizatoriaus ašiai.

II. Bandymai ir jų apdorojimas

1. Pakeiskite NB 90° TN LC ląstelę lygiagrečiai orientuota LC ląstele.
2. Parinkite $\theta = 45^o$ esant V=0 kaip parodyta pav. 8. Tegu analizatoriaus pralaidumo ašis yra statmena poliarizatoriaus ašiai. Sukite lygiagrečiai orientuotą LC ląstelę tol, kol praėjusi šviesa pasiekia maksimalų intensyvumą ($T_\perp$). Tai atitinka padėtį $\theta = 45^o$. Pažymėkite vertę $T_\perp$, tada išmatuokite praėjusios šviesos intensyvumą ($T_\parallel$) tai pačiai LC ląstelei kai analizatoriaus pralaidumo ašis lygiagreti poliarizatoriaus ašiai (taip pat esant V = 0).



Pav. 8 Eksperimentinės įrangos schematinė diagrama.
(Rodyklė L yra orientacijos kryptis)

Klausimas C-(1) (2.5 taško)
Imame lazerio šviesos bangos ilgį 650 nm, LC sluoksnio storį 7,7 μm, apytikslė vertė $\Delta n \approx 0{,}25$ yra žinoma. Iš anksčiau gautų eksperimentinių duomenų $T_\perp$ ir $T_\parallel$ apskaičiuokite tikslią fazių skirtumo vertę δ ir tiksią dvigubo lūžio rodiklio vertę Δn turimai LC ląstelei esant V=0.

3. Analogiškai bandymui (1), esant $\theta = 45^o$ panaudokite 100 Hz stačiakampių bangų įtampą iš funkcinio generatoriaus prijungdami prie dviejų ląstelės elektrodų, keiskite įtampą (V_{rms}) nuo 0 iki 7 V ir išmatuokite elektrooptinę perjungimo kreivę ($T_{\square}$) esant analizatoriaus pralaidumo ašiai lygiagrečiai poliarizatoriaus pralaidumo ašiai. (Nuoroda: Matuojant $T_{\square}$ perjungimo kreivę yra patogu padidinti duomenų tikslumą virš T_c, duomenys reikalingi atsakant į toliau pateiktus klausimus.)

*** Nustatant krizinį tašką jei reikia pamatuokite daugiau duomenų (ypač 0.5-4.0 V srityje).**

Klausimas C-(2) (3.0 taško)

Išmatuokite, sudarykite lentelę ir pavaizduokite grafiškai duotos lygiagrečiai orientuotos LC ląstelės elektrooptinio perjungimo kreivę T□ esant $\theta = 45^o$.

Klausimas C-(3) (2.0 taško)
Iš elektrooptinio perjungimo duomenų nustatykite išorinės įtampos V_c vertę.
Nuoroda: V_c yra įtampa, kuriai esant anizotropinės LC ląstelės fazių skirtumas tampa π (ar 180°).
Atsiminkite, kad Δn yra V funkcija ir mažėja didėjant V.
Interpoliacija yra reikalinga nustatant tikslią V_c vertę.

Vertinimo schema

No.		Vertinimas
A(1)	Išmatuokite, sudarykite lentelę ir pavaizduokite grafiškai $\mathcal{I}$ priklausomybę nuo I.	**1.5 t.**
a.	Duomenų lentelėje pateikti kintamieji ir vienetai.	0.3
b.	Parinkta tinkamo dydžio skalė abscisių ir ordinačių ašyse, vienetai leidžia gauti sąryšius, atitinkančius eksperimento tikslumą.	0.3
c.	Duomenys adekvačiai atvaizduoti kreive (Pav. A-1)	0.9
A(2)	Apytiksliai nustatykite maksimalų srovės stiprį I_m tiesinėje $\mathcal{I}$ priklausomybės nuo I dalyje. Rodyklėmis (↓) pažymėkite $\mathcal{I}$ - I kreivės tiesinę dalį ir nustatykite slenkstinį srovės stiprį I_{th}..	**3.5 t.**
a.	Pažymėta tiesinė dalis.	0.5
b.	Mažiausių kvadratų metodu ar liniuote nubrėžiant tiesę gauta priklausomybė su paklaidų analize	1.5
c.	Gauta tinkama $I_m \pm \Delta I_m$	0.5
d.	Adekvati $I_{th} \pm \Delta I_{th}$ vertė	1.0
B-(1)	Išmatuokite, surašykite į lentelę ir pavaizduokite grafiškai elektrooptinę perjungimo kreivę ($\mathcal{I}$ priklausomybės nuo V_{rms} kreivę) NB 90° TN LC ir nustatykite perjungimo polinkį γ, čia γ yra $(V_{90}-V_{10})/V_{10}$.	**5.0 t.**
	Duomenų lentelėje pateikti kintamieji ir vienetai.	0.3
	Parinkta tinkamo dydžio skalė abscisių ir ordinačių ašyse, vienetai leidžia gauti sąryšius, atitinkančius eksperimento tikslumą.	0.3
	Korektiškai išmatuotas šviesos intensyvumas ($\mathcal{I}$) kaip įtampos (V_{rms}) funkcija ir nubrėžtas tinkamas kreivės $\mathcal{I}$ - V_{rms} grafikas.	
	▪ Pralaidumo intensyvumas tampa nuliu nesant normalios modos.	0.4
	▪ Yra nedidelis optinis šuolis prieš išorinei įtampai pasiekiant krizinę vertę.	0.8
	▪ Praėjusios šviesos intensyvumas greitai ir staigiai didėja kai išorinė įtampa viršija krizinę vertę.	0.4
	▪ Praėjusios šviesos intensyvumas sudaro plato kai išorinė įtampa viršija 3.0 V.	0.4
	b. Adekvati γ vertė su paklaida, $\gamma \pm \Delta\gamma$.	
	▪ Korektiška maksimalaus šviesos intensyvumo analizė.	0.6
	▪ Korektiška vertės V_{90} analizė.	0.6
	▪ Korektiška vertės V_{10} analizė.	0.6
	▪ Korektiška $\gamma \pm \Delta\gamma$ vertė, $(0.42 \sim 0.44) \pm 0.02$.	0.6
B-(2)	Nustatykite naudojamos NB 90° TN LC ląstelės krizinę įtampą V_c. Grafiškai	**2.5 t.**

	parodykite kaip nustatote $V_{c.}$ vertę	
	Adekvati V_C vertė su paklaida, $V_C \pm \Delta V_C$.	
	■ Sutankinti taškai V_C aplinkoje.	0.8
	■ Korektiška vertės V_C analizė.	0.7
	■ Korektiška $V_C \pm \Delta V_C$ vertė, (1.2 ~ 1.5) ± 0.01 V.	1.0
C-(1)	Imame lazerio šviesos bangos ilgį 650 nm, LC sluoksnio storį 7,7 μm, apytikslė vertė $\Delta n \approx 0{,}25$ yra žinoma. Iš anksčiau gautų eksperimentinių duomenų $T_\perp$ ir $T_\parallel$ apskaičiuokite tikslią fazių skirtumo vertę δ ir tiksią dvigubo lūžio rodiklio vertę Δn turimai LC ląstelei esant V=0.	**2.5 t.**
	Adekvati δ vertė ir Δn vertė su paklaida.	
	■ Korektiška $T_\perp$ verčių analizė.	0.3
	■ Korektiška $T_\parallel$ verčių analizė.	0.3
	■ Korektiškai nustatyta m vertė.	0.9
	■ Korektiška δ vertė, 17.7 ~ 18.2.	0.5
	■ Korektiška Δn vertė, 0.23 ~ 0.25.	0.5
C-(2)	Išmatuokite, sudarykite lentelę ir pavaizduokite grafiškai duotos lygiagrečiai orientuotos LC ląstelės elektrooptinio perjungimo kreivę T□ esant $\theta = 45^o$.	**3.0 t.**
	a. Tinkama duomenų lentelė su nurodytais dydžiais ir vienetais.	0.3
	b. Tinkamai parinkti abscisės ir ordinatės masteliai, leidžiantis nustatyti dėsningumus eksperimento tikslumu.	0.3
	c. Korektiškas T kaip įtampos funkcijos (V_{rms}) matavimas ir tinkamas kreivės T-V_{rms} pavaizdavimas Correct measurement of the □ as a function of the applied voltage and adequate curve plot.	
	■ Trys minimumai ir du aštrūs maksimumai.	1.5
	■ Maksimumų vertės per 15 % vienas nuo kito.	0.5
	■ Minimumai mažesni negu 0.1 V.	0.4
C-(3)	Iš elektrooptinio perjungimo duomenų nustatykite išorinės įtampos V_c vertę. Nuoroda: V_c yra įtampa, kuriai esant anizotropinės LC ląstelės fazių skirtumas tampa π (ar 180°). Atsiminkite, kad Δn yra V funkcija ir mažėja didėjant V. Interpoliacija yra reikalinga nustatant tikslią V_c vertę.	**2.0 t.**
	Tinkama V_c vertė su paklaida.	
	■ Praplėstas mastelis ir paimta daugiau taškų V_c aplinkoje.	0.3
	■ Nustatyta minimali V_c.	0.8
	■ Korektiškai ištirta V_c.	0.5
	■ Tiksli $V_c \pm \Delta V_c$ vertė, (3.2 ~ 3.5) ± 0.1 V.	0.4

Sprendimai

(Dalis A) Lazerinis diodas ir fotodetektorius

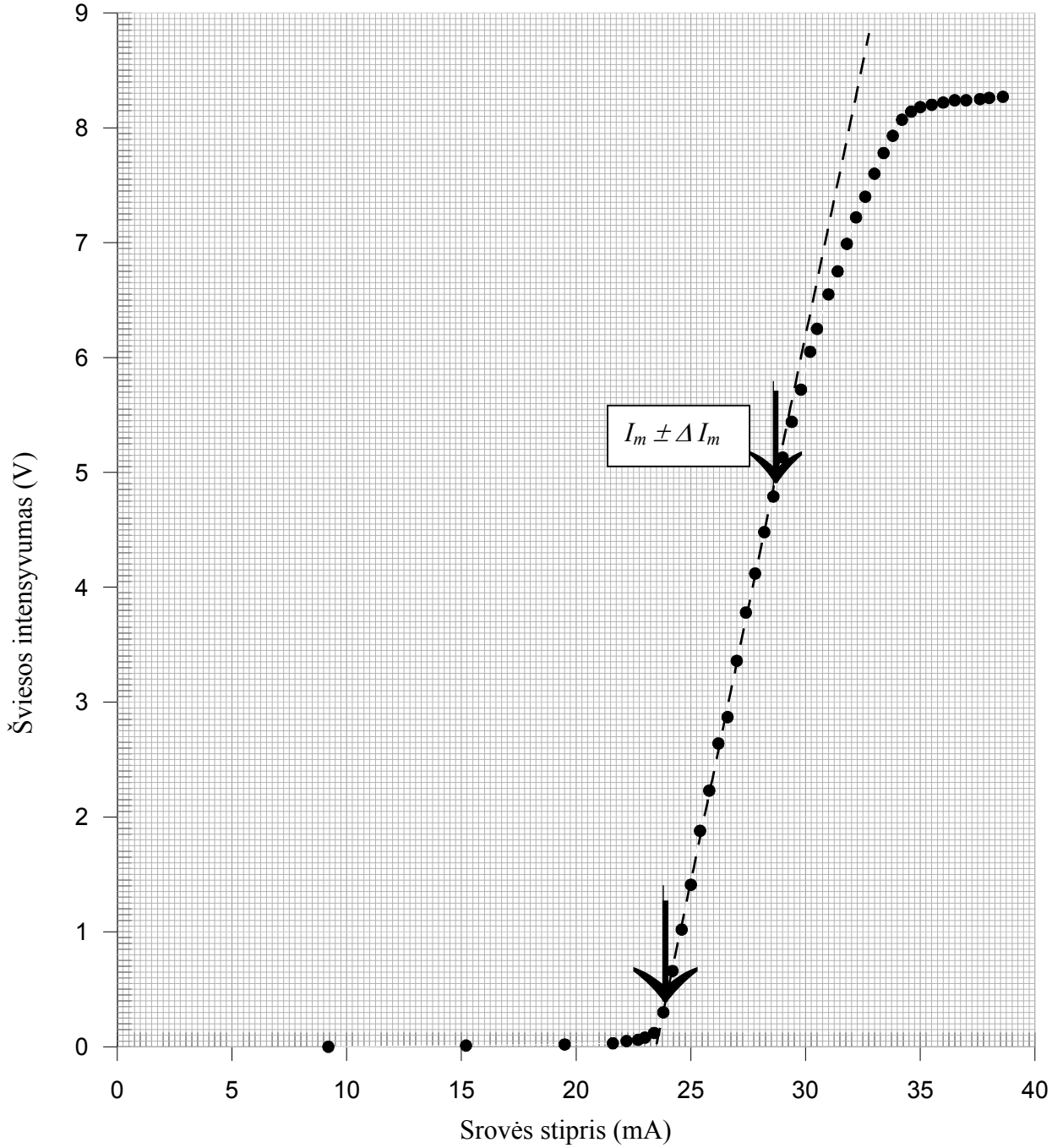
Klausimas A-(1) Išmatuojame, sudarome lentelę ir pavaizduojame grafiškai $\mathcal{J}$ priklausomybės nuo I kreivę.

a. Duomenys; Lentelėje teisingai nurodyti kintamieji ir vienetai.
Lentelė A-(1): $\mathcal{J}$ priklausomybė nuo I.

I (mA)	9.2	15.2	19.5	21.6	22.2	22.7	23.0	23.4	23.8
$\mathcal{J}$ (V)	0.00	0.01	0.02	0.03	0.05	0.06	0.09	0.12	0.30
I (mA)	24.2	24.6	25.0	25.4	25.8	26.2	26.6	27.0	27.4
$\mathcal{J}$ (V)	0.66	1.02	1.41	1.88	2.23	2.64	3.04	3.36	3.78
I (mA)	27.8	28.2	28.6	29.0	29.4	29.8	30.2	30.5	31.0
$\mathcal{J}$ (V)	4.12	4.48	4.79	5.13	5.44	5.72	6.05	6.25	6.55
I (mA)	31.4	31.8	32.2	32.6	33.0	33.4	33.8	34.2	34.6
$\mathcal{J}$ (V)	6.75	6.99	7.22	7.40	7.60	7.78	7.93	8.07	8.14
I (mA)	35.0	35.5	36.0	36.5	37.0	37.6	38.0	38.6	
$\mathcal{J}$ (V)	8.18	8.20	8.22	8.24	8.24	8.25	8.26	8.27	

Srovės stiprio paklaida ±0.1 mA, įtampos ±0.01 V

b. Brėžinys: tinkami abscisės ir ordinatės masteliai ir duomenys, atitinkantys eksperimento tikslumą.
c. Kreivė: Tinkami duomenys ir linijos forma kaip pateikta pav. A-1. Pradžia ~0 ☐ slenkstis ☐ tiesinė dalis ☐ įsotinimas



Pav. A-1 $\mathcal{J}$ priklausomybės nuo I grafikas

Klausimas A-(2) Nustatykite maksimalų srovės stiprį I_m su paklaida tiesinėje $\mathcal{J} - I$ dalyje. Strėliukėmis (↓) pažymėkite tiesinę $\mathcal{J}$ - I kreivės dalį ir nustatykite slenkstinį srovės stiprį I_{th} su galimų k netikslumų analize.

a. Tiesinės dalies pav. A-1 pažymėjimas
b. Mažiausių kvadratų metodu ar nubrėžiant liniuote tiesę su paklaidų analize

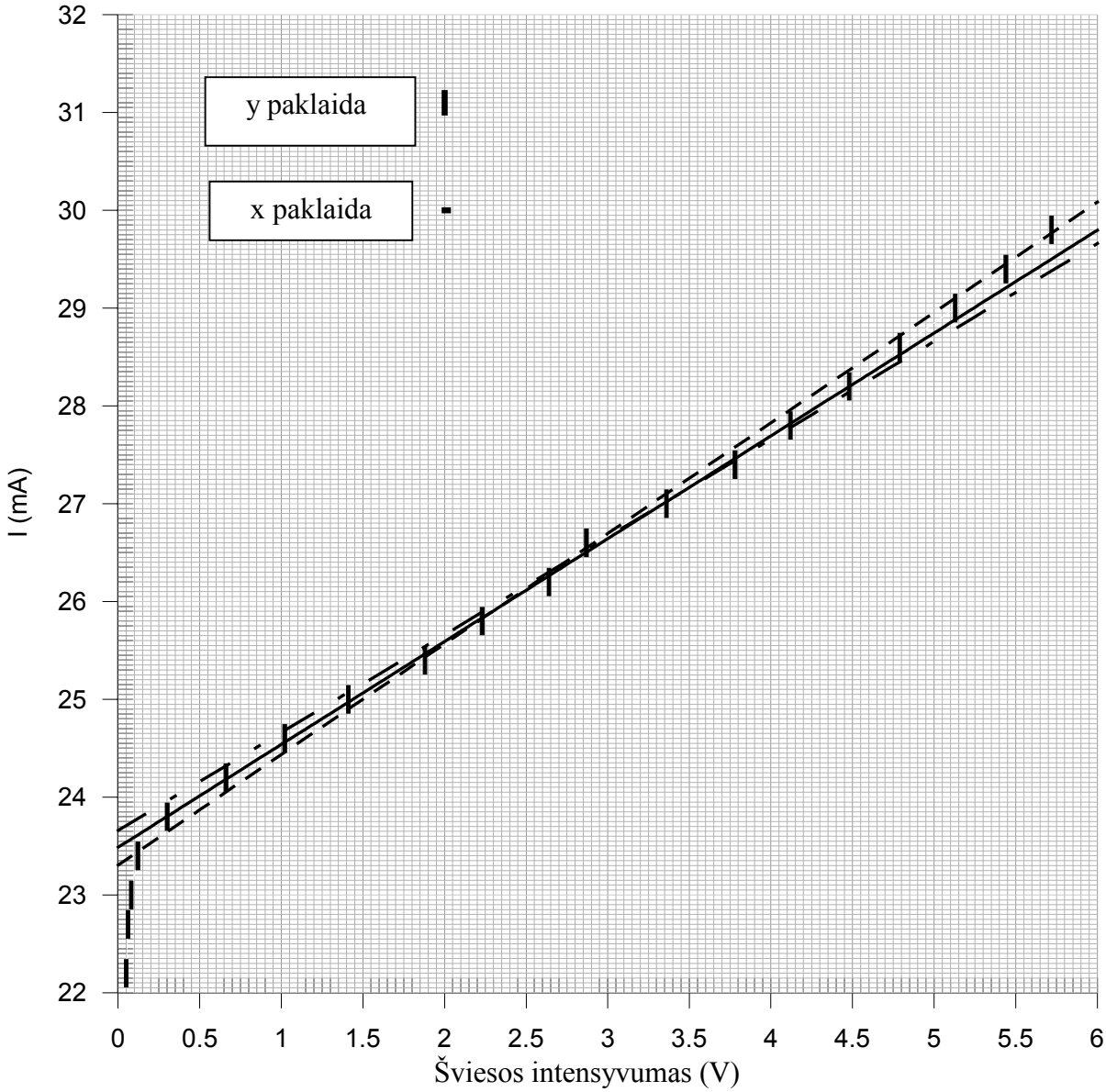
Mažiausių kvadratų metodas	Brėžimas liniuote
Paklaida grafike 0.0x mA (0.5 t)	Paklaida grafike 0.x mA (0.5 t)
Mažiausių kvadratų metodas (0.5 t.)	Išplėstas mastelis (0.5 t)
Paklaidų analizė (0.5 pts)	Trijų linijų brėžimas paklaidų analizei (0.5 t,)

c. $I_m \pm \Delta I_m$: Tinkama I_m vertė ir paklaida ($\pm \Delta I_m$) iš tiesinės $\mathcal{J}$-I kreivės dalies.

d. Tinkama I_{th} vertė su paklaida

I_{th} = (21~26) ± (0.01 ar 0.2 pavienei vertei) mA

Tinkama I_{th} (0.5 t.) ir ($\pm \Delta I_{th}$)



Pav. A-2 Tiesės ir ekstrapoliacija.

Priedai

A1-1

Mažiausių kvadratų metodas

I=m $\mathcal{J}$+b ☐ b=I_{th}

Imant y=mx+b

	Y:I(mA)	X: J	XY	X^2	Y(X)= mX+b	$(Y-Y(X))^2$
1	23.8	0.3	7.14	0.09	23.7937	3.969E-05
2	24.2	0.66	15.972	0.4356	24.17134	0.000821
3	24.6	1.02	25.092	1.0404	24.54898	0.00260
4	25	1.41	35.25	1.9881	24.95809	0.00176
5	25.4	1.88	47.752	3.5344	25.45112	0.00261
6	25.8	2.23	57.534	4.9729	25.81827	0.000334
7	26.2	2.64	69.168	6.9696	26.24836	0.00234
8	26.6	3.04	80.864	9.2416	26.66796	0.00462
9	27	3.36	90.72	11.2896	27.00364	1.325E-05
10	27.4	3.78	103.572	14.2884	27.44422	0.00196
11	27.8	4.12	114.536	16.9744	27.80088	7.744E-07
12	28.2	4.48	126.336	20.0704	28.17852	0.000461
13	28.6	4.79	136.994	22.9441	28.50371	0.00927
	ΣY = 340.6	ΣX= 33.71	ΣXY= 910.93	ΣY^2 = 113.840		$\Sigma (Y-Y(x))^2$ = 0.0268

$$\Delta = N\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2 = 13(113.840) - (33.71)^2 = 343.556$$

$$m = \frac{1}{\Delta}\left(N\Sigma xy - \Sigma x\Sigma y\right) = \frac{13(910.93) - (33.71)(340.6)}{343.556} = 1.049$$

$$b = \frac{1}{\Delta}\left(\Sigma x^2\Sigma y - \Sigma x\Sigma xy\right) = \frac{(113.840)(340.6) - (33.71)(910.93)}{343.556} = 23.479$$

$$\sigma_y = \frac{1}{N-2}\sqrt{\Sigma\left(y - y(x)\right)^2} = \frac{1}{13-2}\sqrt{0.0268} = 0.015$$

$$\sigma = \sqrt{(\sigma_y)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\sigma_x\right)^2} = \sqrt{(0.015)^2 + \left(1.049 \times 0.005\right)^2} = 0.016$$

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{N\sigma^2}{\Delta}} = \sqrt{\frac{13 \times 0.016^2}{343.556}} = 0.0031$$

$$\sigma_b = \sqrt{\frac{\sigma^2}{\Delta}\Sigma x^2} = 0.016 \times \sqrt{\frac{113.840}{343.556}} = 0.0092$$

$I_{th} = 23.48 \pm 0.01$ mA

A1-2

Brėžimas

I=m $\mathcal{J}$+b □ b=I_{th}

Imant y=mx+b

tiesė 1: Y = 1.00X + 23.66

tiesė 2: Y = 1.05X + 23.48

tiesė: Y = 1.13X + 23.31

I_{th}(av.) = 23.48

I_{th}(std.) = 0.18

$I_{th} = 23.5 \pm 0.2$ mA

Sprendimai

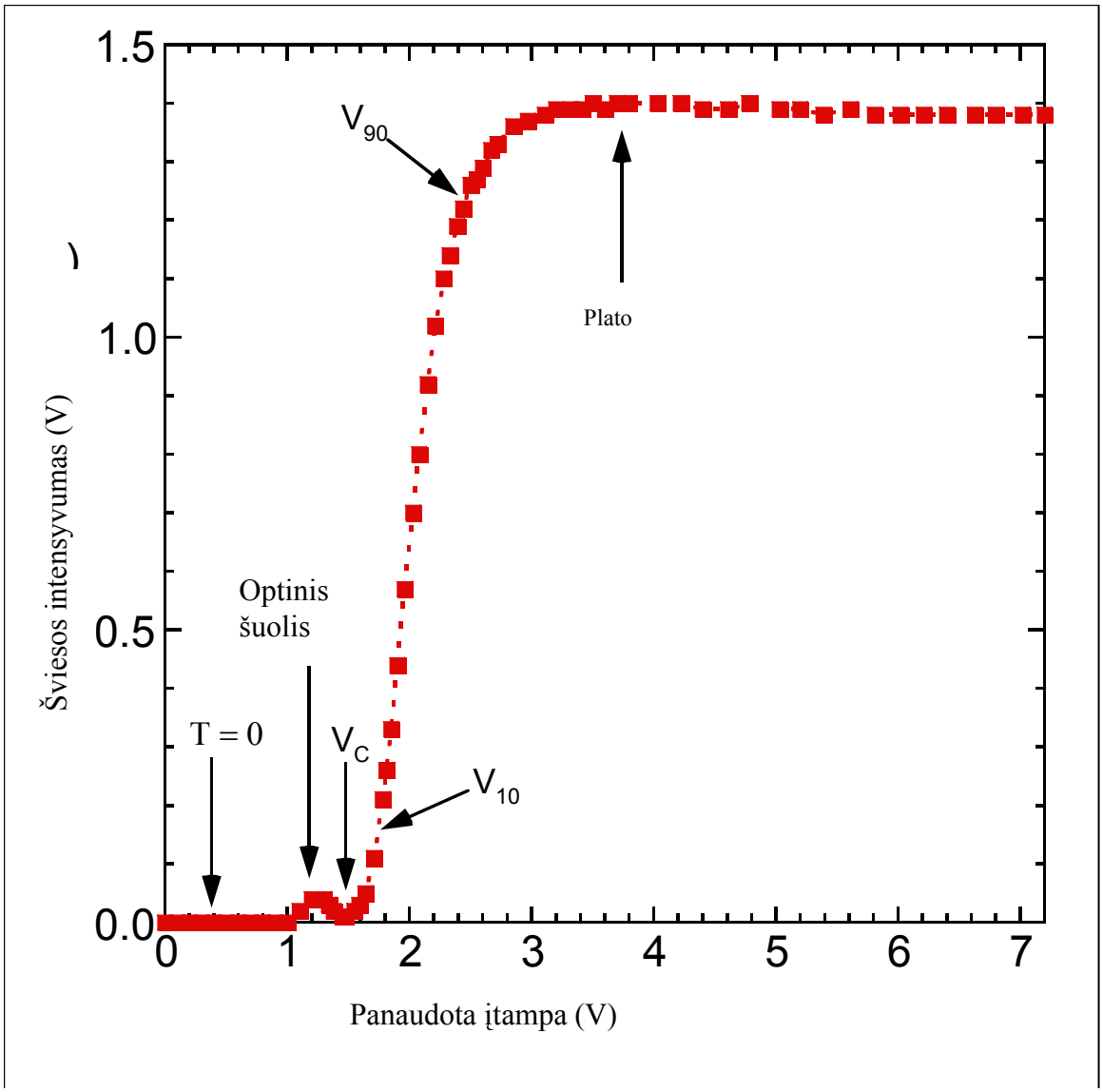
Klausimas B-(1)

Išmatuojame, tabuliuojame ir nubrėžiame elektrooptinės priklausomybės kreivę ($\mathcal{J}$ nuo V_{rms}) kai NB 90° TN LC ir nustatome jos polinkį γ, čia γ yra $(V_{90}-V_{10})/V_{10}$.

Panaudota įtampa (V)	Šviesos intensyvumas (V)	Panaudota įtampa (V)	Šviesos intensyvumas (V)
0.00	0.00	2.44	1.22
0.10	0.00	2.50	1.26
0.20	0.00	2.55	1.27
0.30	0.00	2.60	1.29
0.40	0.00	2.67	1.32
0.50	0.00	2.72	1.33
0.60	0.00	2.85	1.36
0.70	0.00	2.97	1.37
0.80	0.00	3.11	1.38
0.90	0.00	3.20	1.39
1.00	0.00	3.32	1.39
1.10	0.02	3.41	1.39
1.20	0.04	3.50	1.40
1.24	0.04	3.60	1.39
1.30	0.04	3.70	1.40
1.34	0.03	3.80	1.40

1.38	0.02	4.03	1.40
1.45	0.01	4.22	1.40
1.48	0.01	4.40	1.39
1.55	0.02	4.61	1.39
1.59	0.03	4.78	1.40
1.64	0.05	5.03	1.39
1.71	0.11	5.20	1.39
1.78	0.21	5.39	1.38
1.81	0.26	5.61	1.39
1.85	0.33	5.81	1.38
1.90	0.44	6.02	1.38
1.96	0.57	6.21	1.38
2.03	0.70	6.40	1.38
2.08	0.80	6.63	1.38
2.15	0.92	6.80	1.38
2.21	1.02	7.02	1.38
2.28	1.10	7.20	1.38
2.33	1.14		
2.39	1.19		

b. Vienetų ir mastelio abscisei ir ordinatei parinkimas pagal eksperimento tikslumą.

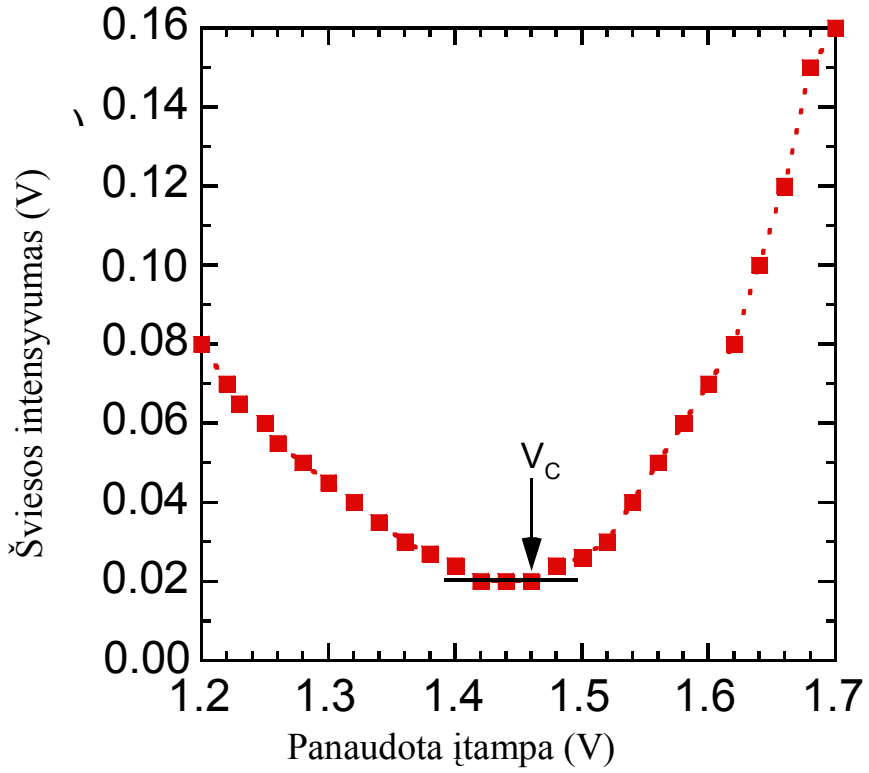


c. Šviesos intensyvumo ($\mathcal{J}$) kaip panaudotos įtampos (V_{rms}) funkcijos korektiškas matavimas ir tinkamas kreivės $\mathcal{J}$ - V_{rms} brėžinys.
   - Praėjusios šviesos intensyvumas juodoje padėtyje mažesnis už 0.05 V.
   - Nedidelis optinis šuolis prieš panaudotai įtampai pasiekiant kritinę vertę.
   - Praėjusios šviesos intensyvumas greitai auga kai panaudota įtampa viršija kritinę.
   - Praėjusios šviesos intensyvumas sudaro plato kai panaudota įtampa viršija 3.0 V.

d. Tinkama γ vertė su paklaida.
   - Surasta šviesos intensyvumo maksimali vertė panaudotos įtampos tarp 3.0 ir 7.2 V.
   - Nustatyta 90 % maksimalaus šviesos intensyvumo vertė. Interpoliuojant nustatyta panaudota įtampa V_{90}.
   - Nustatyta 10 % maksimalaus šviesos intensyvumo vertė. Interpoliuojant nustatyta panaudota įtampa V_{10}.
   - Tinkama $\gamma \pm \Delta\gamma$ vertė, $(0.42 \sim 0.44) \pm 0.02$.

Klausimas B-(2)
Nustatome kritinę įtampą V_c naudojamos NB 90° TN LC celės. Grafiku parodome kaip nustatoma V_c vertė.

   - Padarytas didesniu masteliu su daugiau taškų grafikas V_C aplinkoje.
   - V_C vertė nustatyta kai praeinančios šviesos intensyvumas staigiai didėja
   - Tinkama $V_C \pm \Delta V_C$ vertė, $(1.20 \sim 1.50) \pm 0.01$ V.



(Šiame paveiksle pateikti duomenys neatitinka ankstesnių paveikslų, o tik parodo kaip gauti V_c)

Klausimas C-(1)

Laikykime, kad lazerio šviesos bangos ilgis 650 nm, LC sluoksnio storis 7.7 μm, o apytikslė vertė Δn ≈ 0.25 yra žinomi. Iš anksčiau gautų eksperimentinių duomenų $T_{\square}$ ir $T_{\square}$ apskaičiuokite tikslią vėlavimo fazės δ vertę ir tikslią dvigubo lūžio rodiklio vertę Δn šiai LC ląstelei esant V=0.

a. Tinkamos δ ir Δn vertės su paklaidomis.

- Gauta vidutinė $T_{||}$ vertė.
- Gauta vidutinė $T_{\perp}$ vertė.
- Nustatyta eilės m vertė.
- Tinkama δ vertė, 15.7 ~ 18.2.
- Tinkama Δn vertė, 0.20 ~ 0.24

$$T_{//} = \frac{0.31+0.31+0.31}{3} = 0.31 \pm 0.01 \text{ V}$$

$$T_{\perp} = \frac{1.04+1.03+1.04}{3} = 1.04 \pm 0.01 \text{ V}$$

$$\tan\frac{\delta}{2} = \pm\frac{\sqrt{T_{\perp}}}{\sqrt{T_{//}}} = -1.83^{*} \quad \therefore \delta = 4.14 + 2m\pi \qquad (or -2.14 + 2m\pi)$$

$$\delta = \frac{2\pi d\Delta n}{\lambda} = \frac{2\pi \times 7.7 \times 0.25}{0.65} = 18.61$$

Imame $m = 2(\text{ar}3)$ $\quad \therefore \delta = 16.70(5.32\pi)$

Iš $\delta = \dfrac{2\pi d\Delta n}{\lambda} \quad \therefore \Delta n = \dfrac{\delta\lambda}{2\pi d} = 0.22$

Priimtinos vertės $\therefore \Delta n = (0.20 - 0.24)$

*jei $\tan\dfrac{\delta}{2} = 1.83$, δ vertė turi būti 4.68π ar 6.68π,

kuri nesiderina su C2 užduoties duomenimis.

Klausimas C-(2)

Išmatuokite, tabuliuokite ir nubrėžkite elektrooptinio perjungimo kreivę $T_{\square}$ lygiagrečiai orientuotai LC ląstelei esant θ = 45°.

a. Tinkama duomenų lentelė su kintamaisiais ir matavimo vienetais

Panaudota įtampa (V)	Šviesos intensyvumas (V)	Panaudota įtampa (V)	Šviesos intensyvumas (V)	Panaudota įtampa (V)	Šviesos intensyvumas (V)
0.00	0.30	1.80	0.78	2.85	0.21
0.10	0.30	1.83	0.92	2.88	0.18
0.20	0.29	1.86	1.05	2.91	0.16
0.30	0.29	1.89	1.19	2.94	0.14
0.40	0.29	1.92	1.27	2.97	0.12
0.50	0.28	1.95	1.34	3.00	0.09
0.60	0.26	1.98	1.40	3.06	0.08
0.70	0.23	2.01	1.47	3.09	0.06
0.80	0.19	2.04	1.48	3.12	0.05
0.90	0.09	2.07	1.48	3.18	0.04

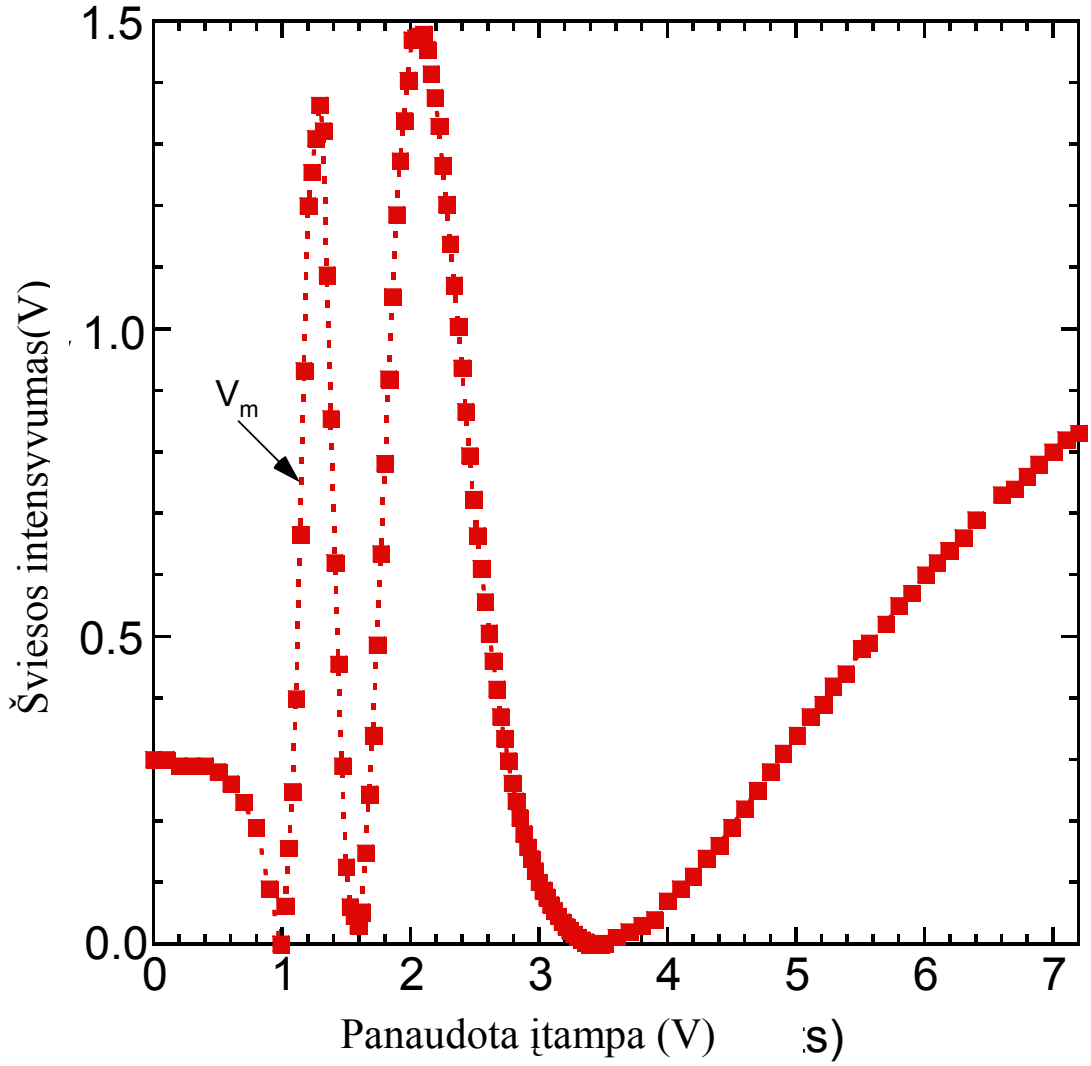
0.99	0.00	2.10	1.48	3.21	0.03
1.02	0.06	2.13	1.45	3.24	0.02
1.05	0.16	2.16	1.42	3.27	0.02
1.08	0.25	2.19	1.38	3.30	0.01
1.11	0.40	2.22	1.33	3.33	0.00
1.14	0.67	2.25	1.27	3.36	0.00
1.17	0.93	2.28	1.20	3.39	0.00
1.20	1.25	2.31	1.14	3.42	0.00
1.26	1.31	2.34	1.07	3.45	0.00
1.29	1.36	2.37	1.00	3.48	0.00
1.32	1.32	2.40	0.94	3.51	0.00
1.35	1.09	2.43	0.87	3.60	0.01
1.38	0.85	2.46	0.79	3.70	0.02
1.41	0.62	2.49	0.72	3.80	0.03
1.44	0.46	2.52	0.66	3.90	0.04
1.47	0.29	2.55	0.61	4.00	0.07
1.50	0.13	2.58	0.56	4.10	0.09
1.53	0.06	2.61	0.51	4.20	0.11
1.59	0.03	2.64	0.46	4.30	0.14
1.62	0.05	2.67	0.42	4.40	0.16
1.65	0.15	2.70	0.37	4.50	0.19
1.68	0.24	2.73	0.33	4.60	0.22
1.71	0.34	2.76	0.30	4.70	0.25
1.74	0.49	2.79	0.26	4.80	0.28
1.77	0.63	2.82	0.23	4.90	0.31

Panaudota įtampa (V)	Šviesos intensyvumas (V)
5.01	0.34
5.11	0.37
5.21	0.39
5.29	0.42
5.39	0.44
5.51	0.48
5.57	0.49
5.70	0.52
5.80	0.55
5.90	0.57
6.01	0.60
6.10	0.62
6.19	0.64
6.30	0.66
6.40	0.69
6.60	0.73
6.70	0.74
6.80	0.76
7.00	0.80
7.20	0.83

b. Tinkamai parinkti abscisės ir ordinatės ašių masteliai ir vienetai, atitinkantys eksperimento duomenų dydį ir tikslumą.

c. Teisingas T□ kaip panaudotos įtampos (V_{rms}) funkcijos matavimas ir tinkama T□-V_{rms} kreivė.

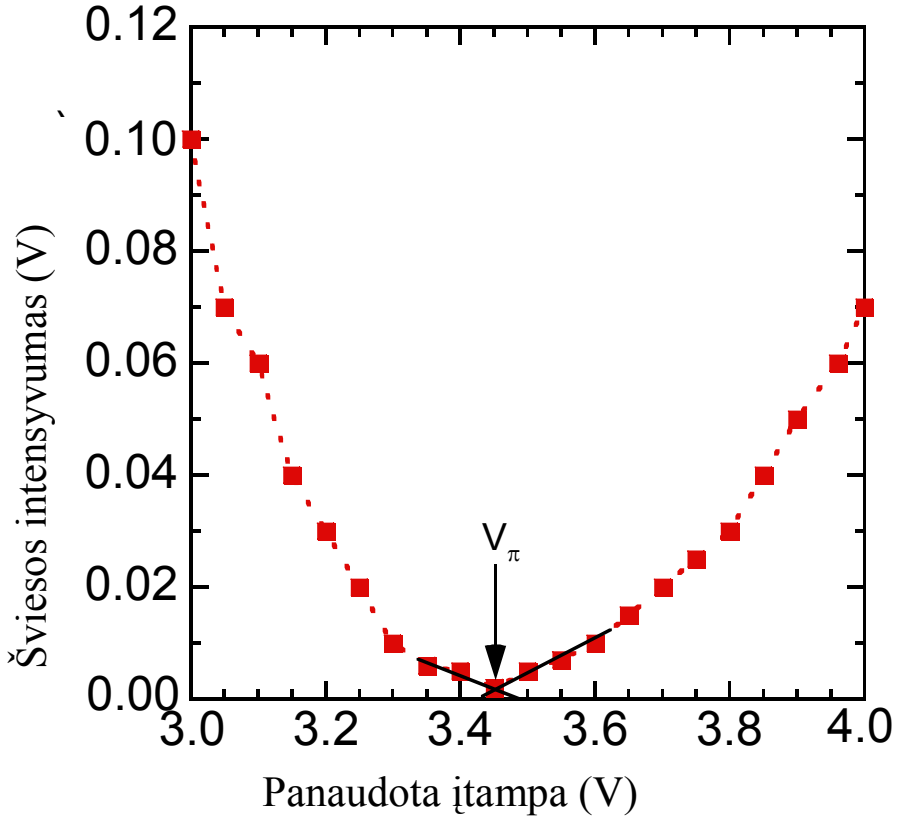
- Minimumas ir du aštrūs maksimumai.
- Tarp maksimumų 15% atstumas.
- Minimumas mažesnis už 0.1 V.



Klausimas C-(3)
Iš elektrooptinio perjungimo duomenų nustatykite išorinio panaudoto potencialo vertę V_π

a. Tinkama V_π vertė su paklaida.

- Praplėskite mastelį ir gaukite daugiau taškų V_π aplinkoje.
- Nustatykite teisingą V_π minimumą.
- Apskaičiuokite V_π vertę interpoliuodami ar apvalindami.
- Tinkama V_π vertė : $(3.2 \sim 3.5) \pm 0.01$ V.



Pastaba: ši informacija interneto svetainėje www.olimpas.lt skelbiama nuo 2008 04 29.