

2-ASIS FIZIKOS TURNYRAS
Užduotis Nr. FT2-12 / 2009 03 02 – 2009 03 29

Užduoties sąlyga / FT2-12 ▼

Skridiniu judanti virvė

Per lengvą įtvirtintą skridinį simetriškai permesta masės m ilgio L netaši virvė. Skridinio spindulys daug mažesnis už virvės ilgį. Vienas virvės galas šiek tiek nuleidžiamas ir dėl to pradeda leisti žemyn, o kitas galas – kilti į viršų. Kai virvės kylančio galo ilgis pasiekia tam tikrą vertę x_0 , virvė atitrūksta nuo skridinio.



1) Kaip priklauso virvės bet kurio taško linijinis greitis nuo kylančio virvės galo ilgio x ($x_0 < x < L/2$)? Nubrėžkite grafiką. (3 balai)

2) Kurioje virvės vietoje veikia didžiausia įtempimo jėga T ? Kaip priklauso ši jėga nuo ilgio x ? Nubrėžkite grafiką. (3 balai)

3) Koks yra virvės kylančio galo ilgis x_0 ? (4 balai)

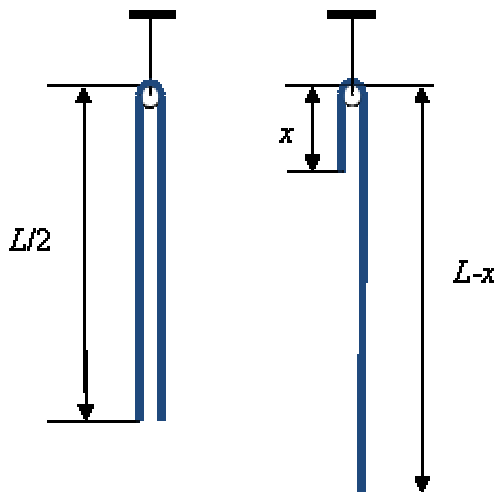
Visais atvejais trinties nepaisyti.

Užduotį parengė Vilniaus universiteto Fizikos fakulteto Puslaidininkių fizikos katedros profesorius, šio Fizikos turnyro užduočių parengimo, jų pateikimo spręsti ir atlikimo vertinimo komisijos narys ir mokyklos „Fizikos olimpas“ dėstytojas habil. dr. Edmundas Kuokštis.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2009 03 02.

Užduoties aiškinamasis sprendimas / FT2-12 ▼

1) Linijinį virvės greitį (modulį) surandame iš energijos tvermės dėsnio, prieš tai apskaičiuodami virvės potencinės energijos sumažėjimą, kai lieka virvės galas x .



Pradžioje virvės masės centras yra $L/4$ žemiau skridinio. Kai vieno virvės galo atstumas iki skridinio yra x , masės centro padėtį x_C surandame iš masės centro apibrėžimo:

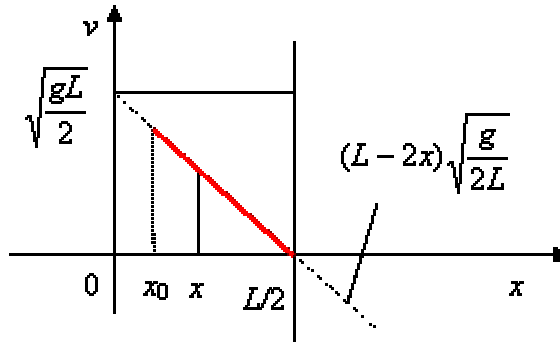
$$x \frac{m}{L} \cdot \frac{x}{2} + \frac{(L-x)^2}{2} \cdot \frac{m}{L} = mx_C. \text{ Iš čia } x_C = \frac{L^2 - 2Lx + 2x^2}{2L}.$$

Taigi potencinės energijos pokytį prilyginę virvės igtai kinetinei energijai gauname

$$mg \left(\frac{L^2 - 2Lx + 2x^2}{2L} - \frac{L}{4} \right) = \frac{mv^2}{2}. \text{ Iš čia } v = \sqrt{g \frac{4x^2 - 4Lx + L^2}{2L}} = (L - 2x) \sqrt{\frac{g}{2L}}.$$

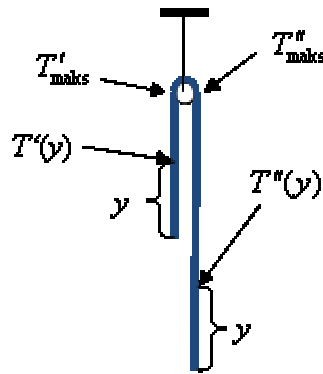
Čia paėmėme tik fizikinę prasmę turintį teigiamą sprendinį, nes visuomet $x < L/2$.

$v(x)$ priklausomybę pavaizduojame grafiškai:



Čia x_0 pažymėtas virvės ilgis, kai ji atitrūksta nuo skridinio (žr. 3 dalį).

2) Galime įsitikinti, kad didžiausia slystančios virvės įtempimo jėga yra ties skridiniu. Pvz., kylančiajai virvės daliai įtempimo jėga y ilgio segmento viršuje $T'(y)$, jei virvė juda pagreičiu a , lygi (žr. brėž.) $T'(y) = \frac{m}{L}y(g+a)$, t.y. $T'(y)$ maksimali, kai $y = \frac{L}{2}$, o tai ties pačiu skridiniu.

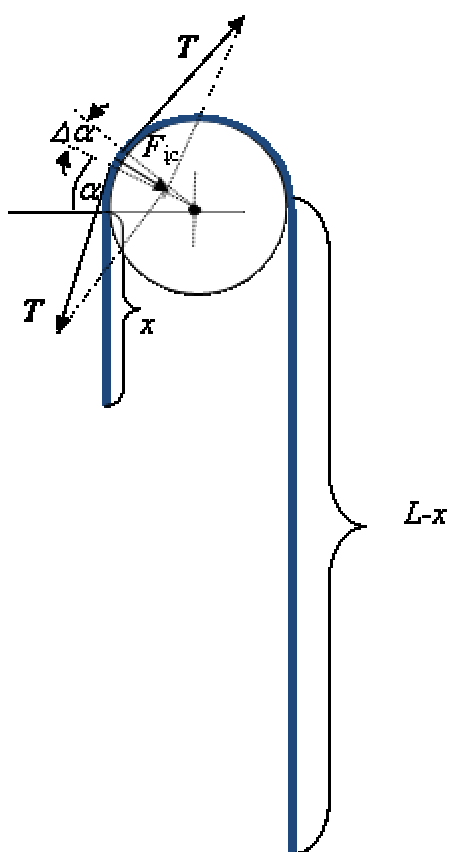
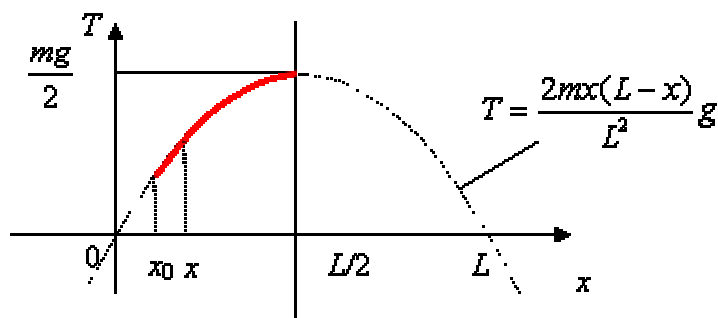


Analogiškai gautume išraišką besileidžiančios virvės y ilgio segmentui: $T''(y) = \frac{m}{L}y(g-a)$, bet ir šiuo atveju $T''(y)$ maksimali, kai $y = \frac{L}{2}$, t. y. vėlgi ties pačiu skridiniu (žr. brėž.). Kadangi skridinio matmenys daug mažesni už visą virvės ilgį, tai ant skridinio esanti virvės dalies masė nežymi, todėl $T'_{maks} \approx T''_{maks} \equiv T$.

Dabar galime surasti T . Tam pritaikome 2-ąjį Niutono dėsnį virvei ir vienai iš jos dalių (šiuo atveju kylančiajai, kurios ilgis x – žr. pirmąjį sprendimo brėž.):

$$\begin{cases} \frac{m}{L}(L-2x)g = ma \\ T - \frac{m}{L}xg = \frac{m}{L}xa \end{cases} \quad \text{. Čia } a \text{ – pagreitis, kuriuo juda virvė.}$$

Iš šių lygčių gauname $T = \frac{2mx(L-x)}{L^2}g$. Tai parabolės lygtis. Jos grafikas parodytas brėžinyje.



3) Dabar panagrinėkime nedidelį virvės elementą Δm , esantį ant skridinio. Šis elementas, būdamas ant skridinio (dar neatitrūkęs), juda skridinio spindulio R apskritimo trajektorija, todėl šį elementą privalo veikti įcentrinė jėga. Ją lemia virvės įtempimo jėga T (elemento Δm galus veikiančių tempimo jėgų vektorių atstojamoji) ir priešingos krypties jėga, kuria šį elementą veikia skridinys (čia nekreipiame dėmesio į sunkio jėgą, nes galiausiai imsime $\alpha = 0$). Virvės elementas atitrūksta nuo skridinio, kai jo pradeda nebespausti skridinys. Kol x didelis ($x < L/2$), virvės greitis mažas, todėl reikalinga ir maža įcentrinė jėga, taigi, didelė skridinio reakcijos jėga, nes įtempimo jėga tuo metu didelė. Virvės greičiui didėjant, pasiekama riba, kai ši jėga lygi 0. Pirmiausia tai pasiekiamai virvės elementui, kuriam $\alpha = 0$ (žr. brėž.).

Užrašome atitrūkimo sąlygą šiam elementui.

$$\frac{\Delta m v^2}{R} = T \Delta \alpha. \quad \text{Čia } \Delta m = \frac{m}{L} R \Delta \alpha.$$

Įrašę į įcentrinės jėgos išraišką Δm , T ir v

išraiškas, gauname

$$\left[\frac{(L-2x)\sqrt{g}}{2L} \right]^2 \frac{m}{L} R \Delta \alpha = \frac{2mx(L-x)}{L^2} g \Delta \alpha,$$

$$8x^2 - 8Lx + L^2 = 0, \quad x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{4} L.$$

Tinka tik sprendinys $x_0 = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} L \approx 0,15L$, nes kitas duoda vertę, didesnę už $L/2$.

Užduoties aiškinamąjį sprendimą pateikė užduoties autorius prof. habil. dr. Edmundas Kuokštis.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2009 04 14.

Turnyro dalyvių sprendimų aptarimas / FT2-12 ▼

Užduotį sudarė 3 klausimai, kurių pirmieji du yra lengvesni (vertinta po 3 balus), trečias – sunkiausias (4 balai). Pirmuosius du klausimus dauguma turnyro dalyvių išsprendė teisingai, o trečiojo idėją suprato tik 5. Pastarojo klausimo esmė – suvokti, kad atitrūkimo momentu virvė pradeda nebeslėgti skridinio.

Būtina atkreipti dėmesį į teisingą grafikų braižymą. Pažymėtinos tokios dalyvių klaidos sprendimų dalyse, kuriose buvo reikalaujama nubrėžti grafikus:

- 1) netinkamai parinktos ašių skalės: grafinė priklausomybė užima nedidelę grafiko ploto dalį, nurodomi matavimo vienetai, nors užduotyje jų nepateikta, nepažymėtos ašys.
- 2) nepažymėti charakteringi grafinių priklausomybių taškai: ekstremumų padėties, grafiko pradžios ir pabaigos koordinatės, nulių taškai ir kt.

Užduoties sprendimų aptarimą parengė užduoties autorius ir jos sprendimų vertintojas prof. habil. dr. Edmundas Kuokštis.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2009 04 14.

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelė / FT2-12 ▼

| Nr. | Sprendimų vertinimo kriterijus | Vertė balais |
|----------------------------------|---------------------------------------|---------------------|
| 1. | Masės centro x_C padėties radimas | 1 |
| 2. | Greičio v apskaičiavimas | 1 |
| 3. | Greičio grafikas | 1 |
| 4. | Didžiausios įtempimo jėgos radimas | 2 |
| 5. | Jėgos grafikas | 1 |
| 6. | Virvės elemento analizė | 2 |
| 7. | Elemento atitrūkimo sąlygos užrašymas | 1 |
| 8. | x_0 vertės radimas | 1 |
| 9. | Netikslumai (1-8) | po -0,5 |
| 10. | Pateikta ne pagal reikalavimus | -0,5 |
| Maksimalus sprendimo įvertinimas | | 10 |

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelę parengė užduoties autorius ir jos sprendimų vertintojas prof. habil. dr. Edmundas Kuokštis.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2009 04 14.